Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2012 - Second Semestre – Math 417 - Géométrie Différentielle
Examen Partiel, 30 avril 2013 – Ayberk Zeytin
120 mins. **Nom & Prénom:** Solutions

Question:	1	2	3	Total
Points:	35	20	20	75
Score:				

On notera les dérivées partielles par:
$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u, \ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = f_{uv}, \text{ etc.}$$

Question1 (35 points)
La surface d'Enneper, $\mathcal{E}$ est définie comme:

$$\mathcal{E} = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x = u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, y = v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, z = u^2 - v^2 \text{ où } (x, y) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

i. Déterminer le vecteur unitaire normale en chaque point, c'est-à-dire déterminer $\vec{n}$.

On considère: $\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{E}$
$$(u,v) \longmapsto \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, \ v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, \ u^2 - v^2\right).$$

Alors:
$$\sigma_u = \begin{pmatrix} 1-(u^2-v^2) \\ 2uv \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \sigma_v = \begin{pmatrix} 2uv \\ 1+(u^2-v^2) \\ -2v \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \sigma_u \times \sigma_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-(u^2-v^2) & 2uv & 2u \\ 2uv & 1+(u^2-v^2) & 2v \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2u(1+u^2+v^2) \\ 2v(1+u^2+v^2) \\ 1-(u^2+v^2)^2 \end{pmatrix}$$

Alors
$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \Big[4(1+\underbrace{u^2+v^2}_{\alpha})^2 \underbrace{(u^2+v^2)}_{\alpha} + 1 - 2\underbrace{(u^2+v^2)}_{\alpha} + \underbrace{(u^2+v^2)}_{\alpha}{}^4\Big]^{1/2}$$
$$= (\alpha^4 + 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha + 1)^{1/2} = \left[(1+\alpha)^4\right]^{1/2} = (1+\alpha)^2 = (1+u^2+v^2)^2$$

$$\Rightarrow \vec{n}(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1-(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

ii. Calculer la première forme fondamentale de $\mathcal{E}$.

$$g = \begin{pmatrix} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle & \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \\ \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle & \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+u^2+v^2)^2 & 0 \\ 0 & (1+u^2+v^2)^2 \end{pmatrix} = (1+u^2+v^2)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors: pour un vecteur tangente $\vec{\omega} = \lambda \cdot \sigma_u + \mu \cdot \sigma_v \in T_{p=\sigma(u,v)}\mathcal{E}$

$$I_p(\vec{\omega}) = (\lambda\ \mu)\, g \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \underline{(1+u^2+v^2)^2 \cdot (\lambda^2+\mu^2)}$$

iii. Déterminer $J_{\vec{n}}(u, v)$.

$$\sigma_{uu} = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{uv} = \sigma_{vu} = \begin{pmatrix} 2v \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{vv} = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors:
$$h = \begin{pmatrix} \langle \vec{n}, \sigma_{uu} \rangle & \langle \vec{n}, \sigma_{uv} \rangle \\ \langle \vec{n}, \sigma_{vu} \rangle & \langle \vec{n}, \sigma_{vv} \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \cdot \begin{pmatrix} 2(1+u^2+v^2) & 0 \\ 0 & -2\cdot(1+u^2+v^2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Par les equations de Weingarten:

$$J_{\vec{n}}(u,v) = -A = h \cdot g^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot (1+u^2+v^2)^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$= \underline{\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2012 - Second Semestre – Math 417 - Géométrie Différentielle
Examen Partiel, 30 avril 2013 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: Solutions

iv. Calculer la seconde forme fondamentale de $\mathcal{E}$.

Pour $p = \sigma(u,v) \in \mathcal{E}$ et $\vec{\omega} = \lambda \cdot \sigma_u + \mu \cdot \sigma_v \in T_{\sigma(u,v)}\mathcal{E}$:

$$\mathbb{I}_p(\vec{\omega}) = -\left\langle J_{\vec{n}}(p)(\vec{\omega}), \vec{\omega} \right\rangle.$$

$$= -\left\langle \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \left\langle \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -2\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2\lambda & -2\mu \end{pmatrix} \cdot g \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= 2\lambda^2 - 2\mu^2.$$

ou: $\mathbb{I}_p(\vec{\omega}) = (\lambda \ \mu) \cdot h \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 2\lambda^2 - 2\mu^2$

v. Montrer que la surface $\mathcal{E}$ est de courbure moyenne nulle en chaque point. (Une telle surface est dite *minimale*.)

$$H_{\mathcal{E}}(u,v) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(J_{\vec{n}}(p)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+u^2+v^2} \cdot (2-2) \right) = 0.$$

Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2012 - Second Semestre – Math 417 - Géométrie Différentielle
Examen Partiel, 30 avril 2013 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: Solutions

Question2 (20 points)

Soit $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe C^∞ et considérer la surface $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon z = f(x,y)\}$ avec la carte locale définie par $\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

i. Déterminer le vecteur unitaire normale en chaque point, c'est-à-dire déterminer $\vec{n}$ en termes de dérivées partielles de f.

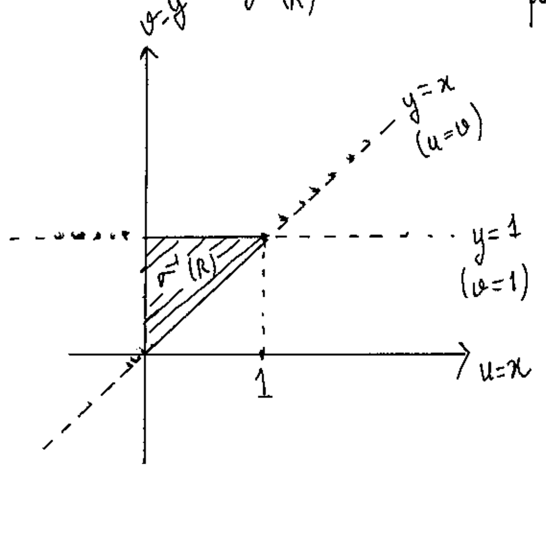
$$\sigma_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}, \quad \sigma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_u \times \sigma_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\left(1 + f_u^2 + f_v^2\right)^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii. Soit $R = \{(x,y,z) \in S \colon x \geq 0,\ y \leq 1 \text{ et } y \geq x\} \subset S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon z = x + y^2\}$. Calculer l'aire de R en utilisant i.

On définit: $f(x,y) = x + y^2$. f est de classe C^∞ et $\sigma(u,v) = (u, v, u+v^2)$.

Alors: $$A(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \cdot dv \underset{\text{par (i.)}}{=} \int_0^1 \int_0^v \sqrt{1+1+4v^2} \cdot du\, dv$$



$$= \int_0^1 \sqrt{\underbrace{2+4v^2}_{a}} \cdot v \cdot dv$$

$da = 8v\,dv$.

$$= \frac{1}{8} \int_2^6 \sqrt{a}\, da = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot a^{3/2} \Big|_2^6$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \left(\sqrt{216} - \sqrt{8}\right).$$

Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2012 - Second Semestre – Math 417 - Géométrie Différentielle
Examen Partiel, 30 avril 2013 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: Solutions

Question3 (20 points)

Soit S une surface connexe et $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ deux champs de vecteurs unitaires normales.

i. Montrer que $\vec{n_1} = \vec{n_2}$ ou $\vec{n_1} = -\vec{n_2}$. (Aide: Considérer $A = \{p \in S : \vec{n_1}(p) = \vec{n_2}(p)\}$ et $B = \{p \in S : \vec{n_1}(p) = -\vec{n_2}(p)\}$)

Pour $p \in S$ les vecteurs $\vec{n}_1(p)$ et $\vec{n}_2(p)$ satisfont:

$$\vec{n}_1(p) \perp T_pS \quad \text{et} \quad \vec{n}_2(p) \perp T_pS.$$

Alors: $\vec{n}_1(p) = \vec{n}_2(p)$ ou $\vec{n}_1(p) = -\vec{n}_2(p)$.

On définit: $A = \{p \in S \mid \vec{n}_1(p) = \vec{n}_2(p)\}$ et $B = \{p \in S \mid \vec{n}_1(p) = -\vec{n}_2(p)\}$ et on note:

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup B = S.$$

De plus: A et B sont fermées de S car $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont continues.

Comme S est connexe, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

c'est-à-dire: $A = \emptyset \Rightarrow \vec{n}_1(p) = -\vec{n}_2(p)$

ou

$B = \emptyset \Rightarrow \vec{n}_1(p) = \vec{n}_2(p)$.

ii. Soient S_1 et S_2 deux surfaces régulières orientable connexes et $S = S_1 \cup S_2$. Supposer que S_1 et S_2 sont des ouverts de S et $S_1 \cap S_2$ est connexe. Montrer que S est orientable.

On sait: S_1 et S_2 sont ouverts. Soit: $\vec{n}_i : S_i \to S^2$ la vecteur normale unitaire de S_i, $i = 1, 2$.

Par (i); sur $S_1 \cap S_2$ $\vec{n}_1(p) = \vec{n}_2(p)$ ou $\vec{n}_1(p) = -\vec{n}_2(p)$.

Si: $\vec{n}_1(p) = \vec{n}_2(p)$: définir

$$\vec{n} : S \longrightarrow S^2, \quad p \longmapsto \begin{cases} \vec{n}_1(p), & p \in S_1 \\ \vec{n}_2(p), & p \in S_2. \end{cases}$$

et si: $\vec{n}_1(p) = -\vec{n}_2(p)$: définir:

$$\vec{n} : S \longrightarrow S^2, \quad p \longmapsto \begin{cases} \vec{n}_1(p), & p \in S_1 \\ \vec{n}_2(p), & p \in S_2. \end{cases}$$

Alors: l'app. $\vec{n}$ est bien définie est continu.

$\Rightarrow$ S est orientable.