MATH 417
ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

(1) Calculer la matrice jacobienne des applications, $F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^k$, suivantes:
   i. $F(x, y) = (ye^x, 2x + y^2)$
   ii. $F(x, y) = (xy, \log(x^2 + y^2 + (x+1)^2,), e^{x^2+y})$
   iii. $F(\rho, \phi, \theta) = (\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\theta))$
   iv. $F(x, y, z) = (x^2 - z^2, \sin(x)\sin(y))$

   Qui de ce qui précède sont difféomorphismes? Si non, trouver un voisinage U de 0 telle que $F|_U$ est une difféomorphisme.

(2) On considère les applications f et g définies par:

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (u = x^2y, v = xy, w = xy^3) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} G : \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (u,v,w) & \mapsto & (u+v+w, uvw) \end{array}$$

   i. Calculer la matrice jacobienne de F.
   ii. Calculer la matrice jacobienne de G.
   iii. Calculer la matrice jacobienne de $G \circ F$.

(3) Calculer le triédre de Frenet (T, N, B) pour chaque courbe régulière.
   i. $\alpha(t) = \left(\dfrac{t^2}{1+t^2}, \dfrac{t^3}{1+t^2}, 0\right)$ (cissoïde de Diocles)
   ii. $\alpha(t) = \left(\displaystyle\int_0^t \sin(u^2)\,du, \int_0^t \cos(u^2)\,du, 0\right)$ (spirale de Cornu)
   iii. $\alpha(t) = \left(\sin^2(t), \sin(t)\cos(t), \cos(t)\right)$ (fenêtre de Viviani)

(4) Trouver paramétrisation unitaire des courbes régulières suivantes:
   i. $\alpha(t) = (e^t\cos(t), e^t, \sin(t), e^t)$,
   ii. $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$, où $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
   iii. $\alpha(t) = (2\cosh(3t), -2\sinh(3t), 6t)$.

(5) Soit α une courbe régulière telle que chaque droite tangent de α, c'est-á-dire que la droite passant par le point $\alpha(t_o)$ dans la direction de $T_\alpha(t_o)$, passe par un point fixe. Montrer que α est une droite.

(6) Soit α une courbe régulière. Le plan normale de α au $t = t_o$ est le plan normale engendré par N et B au $\alpha(t_o)$. Trouver une équation du plan normale et plan osculatuer au point donné pour chacune des courbes suivantes:
   i. $\alpha(t) = \left(e^t, \cos(\pi t), 3t^2\right)$, au $\alpha(1)$,
   ii. $\alpha(\theta) = (\cos(\theta + \pi/4) - \cos(3(\theta + \pi/4)), \sin(\theta + \pi/4) - \sin(3(\theta + \pi/4)), 4\sin(2\theta))$ (tennis ball), au $\alpha(0)$.

(7) Calculer courbure et torsion des courbes régulières suivantes:
   i. $\alpha(t) = \left(\frac{(1-t)^{3/2}}{3}, \frac{(1+t)^{3/2}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$.
   ii. $\alpha(t) = \left(\frac{\arccos(t) - t\sqrt{1-t^2}}{2}, \frac{1-t^2}{2}, 0\right)$
   iii. $\alpha(t) = \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{5}}, \frac{2t}{\sqrt{5}}, \frac{\log(t+\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{5}})\right)$
   iv. $\alpha(t) = \left(\frac{t+\sqrt{1+t^2}}{2}, \frac{1}{2(t+\sqrt{1+t^2})}, \frac{\sqrt{2}\log(t+\sqrt{1+t^2})}{2}\right)$

(8) Soit $\alpha : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ une courbe régulière avec une paramétrisation unitaire. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents:

a. $\tau(t) = 0$ identiquement.

b. $B(t)$ est constante.

c. L'image de α, $\alpha(\mathbf{R})$, contenue dans un plan.

Si α satisfait à une des conditions équivalentes au-dessus, alors α est appelée une courbe plane.

(9) Soit $\alpha : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ une courbe régulière avec une paramétrisation unitaire telle que

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t) = 0).$$

Alors $\kappa(t) = |\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)|$.

(10) Soit $\ell \subset \mathbf{R}^3$ une droite.

i. Trouver une paramétrisation régulière de ℓ, c'est-à-dire que trouver une difféomorphisme $\alpha : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$.

ii. En utilisant i. montrer que la coubure de ℓ est 0, identiquement.

(11) Montrer que une translation est une isométrie de $\mathbf{R}^n$.