MATH 417
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

1. Soit $M(n)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui sur la i-iéme ligne et j-iéme colonne.
   i. Montrer que l'ensemble (le groupe en fait) $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) \subset M(n)$ des matrices inversibles est un ouvert de $M(n)$.
   ii. Montrer que l'application:
   $$\begin{array}{rcl} \mathrm{inv} : M(n) & \longrightarrow & M(n) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$$
   est de classe C^1.
   iii. Calculer la dérivée de l'application:
   $$\begin{array}{rcl} \mathrm{inv} : \mathbf{R} & \longrightarrow & M(n) \\ t & \mapsto & (I_n + tE_{i,j})^{-1} \end{array}$$
   en $t = 0$.
   iv. Montrer que l'application
   $$\begin{array}{rcl} \det : M(n) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$
   est de classe C^1.

2. Soit la surface S définie par:
$$\begin{array}{rcl} x(u,v) & = & u+v \\ y(u,v) & = & uv \\ z(u,v) & = & u^2+v^2 \end{array}$$
   i. Trouver son equation Cartesienne, i.e. trouver une application $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\} = S$.
   ii. Reconnaître S géometriquement.

3. Soit la surface S définie par:
$$\begin{array}{rcl} x(u,v) & = & u-v \\ y(u,v) & = & u+v \\ z(u,v) & = & 2(u^2+v^2) \end{array}$$
   i. Trouver son equation Cartesienne, i.e. trouver une application $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\} = S$.
   ii. Reconnaître S géometriquement.

4. Soit $S_a = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} = a\}$. Montrer que S est une surface régulière. Trouver une application lisse $\varphi : S \longrightarrow S^2$ qui est bijective.

5. Soit $S_p = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = 1\}$. Montrer que S_p est une surface régulière. Trouver 3 translations de $\mathbf{R}^3$, $T_i(z) = z + v_i$ où $i = 1,2,3$, telle que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants et $T_i(S_p) = S_p$. La surface S_p est appelée *primitiv*. Dessiner S_p.

6. Soit $S_d = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \cos(x-y-z) + \cos(x+y-z) + \cos(x+y+z) = 1\}$. Montrer que S_d est une surface régulière. Trouver 3 translations de $\mathbf{R}^3$, $T_i(z) = z + v_i$ où $i = 1,2,3$, telle que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants et $T_i(S_d) = S_d$. La surface S_d est appelée *diamant*. Dessiner S_d.

7. Une surface de révolution, S, est une surface paramétrée et orienté'e de $\mathbf{R}^3$, la surface balayée par la rotation d'une courbe plane, appelée méridienne.
   i. Montrer que si le méridienne est paramétrée par $\alpha(t) = (0, \alpha_2(t), \alpha_3(t))$, alors S admet une carte locale:
   $$\sigma\colon (\alpha_2(t)\cos(\theta), \alpha_2(t)\sin(\theta), \alpha_3(t)).$$
   ii. Soit $M = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $M(S) = S$.
   iii. Calculer la matrice g en fonction de α_2 et α_3.
   iv. Calculer la première forme fondamentale d'une surface de révolution en fonction de α_2 et α_3.
   v. Calculer un champ de vecteur normale de S en fonction de α_2 et α_3.
   vi. Montrer que S^2 et torus sont surfaces de révolution.
   vii. Donner d'autres exemples de surfaces de révolution.