MATH 417
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

1. Soit $\alpha\colon (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}^3$ une courbe régulière telle que $\|\alpha'(t)\| = 1$ et $\kappa_\alpha(t) \neq 0$ pour chaque $t \in (a,b)$. Soit
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon (x,y,z) = \alpha(t) + r\left(N(t)\cos(v) + B(t)\sin(v)\right)\right\}$$
où r est une constante non nulle, $t \in (a,b)$, N est le vecteur normal et B est le vecteur binormal de α, $v \in (0,2\pi)$. Montrer que si S une surface régulière le vecteur normale de S, $\overrightarrow{n}(t,v) = -(N(t)\cos(v) + B(t)\sin(v))$.

2. Soit $f(u)$ et $g(u)$ deux applications qui satisfont $f(u) \neq 0$ et $g'(u) \neq 0$. Montrer que la droite engendre par la vecteur normal de la surface régulière définie comme
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon x = f(u)\cos(v),\ y = f(u)\sin(v),\ z = g(u)\right\}$$
se coupent l'axe z.

3. Soit S une surface régulière, R un sous-ensemble de S et $\sqrt{g} = (\det(g))^{1/2}$ pour $g = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix}$. Montrer que
$$A(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{g}\,du\,dv\,;$$
où $\sigma\colon U \longrightarrow S$ est une carte locale.

4. Soit S une surface régulière et $f\colon S \longrightarrow \mathbf{R}$ une application lisse. Un point $p \in S$ est appelé un *point critique* si $\det(J_f(p)) = 0$. Définir $f : S \longrightarrow \mathbf{R}$ par $f(p) = p \cdot \overrightarrow{v}$; où $\bar{v}$ est une vecteur unitaire dans $\mathbf{R}^3$. Montrer que $p \in S$ est un point critique de S si est seulement si $\overrightarrow{v}$ est une vecteur normal de S au p.

5. Considérer $S = S^2$ avec la carte locale défini comme:
$$\sigma_1\,(u,v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v))\,.$$
Pour $R = \{(x,y,z) \in S^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1/4 \text{ et } z < 0\}$, écrire (ne évaluer pas) une intégrale de calculer l'aire de R en utilisant
   i. σ_1
   ii. $\sigma_2(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$
   iii. $\sigma_3(u,v) = \left(\dfrac{2u}{1+u^2+v^2}, \dfrac{2v}{1+u^2+v^2}, \dfrac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right)$

   Calculer la première (et seconde) forme fondamentale de S^2 en utilisant σ_1, σ_2 et σ_3.

6. Considérer l'application $\sigma(u,v) = \left(\dfrac{\cos(v)}{\cosh(u)}, \dfrac{\sin(v)}{\cosh(u)}, \dfrac{\sinh(u)}{\cosh(u)}\right)$.
   i. Montrer que σ est une carte locale de $S^2 \setminus \{N = (0,0,1), S = (0,0,-1)\}$.
   ii. Calculer les deux formes fondamentales, l'application de Gauß, equations de Weingarten, et la courbure gaußienne et moyenne de S^2 en utilisant σ.

   L'application σ est appelée *la projection de Mercator*.

7. Soit $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1\right\}$ et $S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon xy + yz = 1\right\}$. Trouver une application lisse de S_1 á S_2.

8. Dessiner (`http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/tools/parsur/`) et expliciter la première (et seconde) forme fondamentale pour les surfaces régulières suivantes:
   i. $S_1 = \{(R\cos(u), R\sin(u), v) \colon (u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbf{R}\}$ – cylindre
   ii. $S_2 = \{(\cosh(v)\cos(u), \cosh(v)\sin(u), v) \colon (u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbf{R}\}$ – caténoïde
   iii. $S_3 = \{(\sinh(v)\cos(u), \sinh(v)\sin(u), u) \colon (u,v) \in \mathbf{R}^2\}$ – hélicoïde
   iv. $S_4 = \{(u\cos(v), u\sin(v), v) \colon (u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi]\}$ – hélicoïde

9. Pour la surface S définie comme:
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x = u, y = v, z = u^3 + v^3,\ (u, v) \in \mathbf{R}^2\},$$
déterminer les points de S dont la courbure gaußienne est positive et négative.

10. Calculer l'aire de $R \subset S$ où:
    i. $R = \{(x, y, z) \in S \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \subset S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\}$
    ii. $R = \{(x, y, z) \in S \colon 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\} \quad \subset S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$
    iii. $R = \{(x, y, z) \in S \colon 0 \leq y \leq 5\} \quad \subset S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4\}$

11. Déterminer la courbure gaußienne et moyenne de $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x = u + v,\ y = u - v,\ z = \sqrt{2}uv,\ (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$.

12. Montrer que si toutes les normales à une surface sont concourantes (visiter `fr.wikipedia.org/wiki/Droites_concourantes` pour obtenir une explication) alors la surface est une sphère ou un domaine d'une sphère.

13. Montrer que si toutes les normales à une surface coupent une même droite alors la surface est une surface de révolution ou un domaine d'une surface de révolution. (Aide: $\langle A \times B, C \times D\rangle = \langle A, C\rangle\langle B, D\rangle - \langle A, D\rangle\langle C, B\rangle$)

14. Soit S_1 et S_2 deux surfaces régulières et $f \colon S_1 \longrightarrow S_2$ une application. Rappel que f est appelé un difféomorphisme si f est une bijection différentiable de S_1 à S_2 dont la bijection réciproque est aussi différentiable. Montrer que S_1 est orientable si et seulement si S_2 est orientable.

15. Soit $f \colon U \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe C^∞ et considérer la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon z = f(x, y)\}$ avec la carte locale définie par $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$.
    i. Calculer la première forme fondamentale de S.
    ii. Calculer la seconde forme fondamentale de S.
    iii. Calculer la courbure gaußienne et moyenne de S.