MATH 417
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

1. Soit S une surface régulière et α un courbe sur S. Soit $\varphi\colon S \longrightarrow S$ une isométrie. Montrer que φ conserve la longeur de α

2. Soit
$$\sigma_i \colon U \longrightarrow S_i$$
deux cartes locales des deux surfaces régulières S_i, $i = 1, 2$ avec les tenseurs métriques g^1 et g^2. Montrer que
   i. l'application $\sigma_2 \circ (\sigma_1)^{-1} \colon \sigma_1(U) \longrightarrow S_2$ est une isométrie locale.
   ii. catenoïde est localement isométrique à helïcoide. (pour une animation visiter `http://www.factualworld.com/article/Theorema_egregium`)

3. Soit S une surface régulière et $\sigma\colon U \longrightarrow S$ une carte locale orthogonale (i.e. $g_{1,2} = g_{2,1} = 0$). Alors la courbure Gaußienne de S est:
$$\kappa = -\frac{1}{2\sqrt{g_{1,1}g_{2,2}}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial g_{1,1}}{\partial v}}{\sqrt{g_{1,1}g_{2,2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial g_{2,2}}{\partial u}}{\sqrt{g_{1,1}g_{2,2}}}\right)\right)$$

4. Montrer que
   i. si $\sigma\colon U \longrightarrow S$ est une carte locale isothermale (i.e. $g_{1,1} = g_{2,2} = \lambda(u,v)$ et $g_{1,2} = g_{2,1} = 0$) alors la courbure de S est:
$$\kappa = \frac{1}{2\lambda}\Delta\left(\log(\lambda)\right);$$
   où Δ est le laplacien:
$$\Delta(\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$$
   ii. si $g_{1,1} = g_{2,2} = (u^2 + v^2 + c)^{-2}$ et $g_{1,2} = g_{2,1} = 0$ alors $\kappa = 4c$; où c est une constante.

5. Soit S_1 et S_2 sont deux surfaces régulières équipé avec les cartes locales suivantes:
$$S_1\colon \sigma_1(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), \log(u))\ S_2\colon \sigma_2(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), \log(u))$$
Montrer que la courbure Gaußienne de S_1 est égal à la courbure Gaußienne de S_2.

6. Montrer que pour une surface régulière la courbure Gaußienne, κ, de S au p satisfait:
$$\kappa(p) = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)};$$
où I_p est la première forme fondamentale et II_p est la seconde forme fondamentale.

7. Considérer les points $L = (1,0,0)$, $M = (0,1,0)$ et $N = (0,0,1)$ dans S^2. Soit $\alpha_{L,M}$, $\alpha_{M,N}$, $\alpha_{N,L}$ courbes régulières de L à M, de M à N, de N à L sur S^2 et T le triangle formé par les courbes $\alpha_{L,M}$, $\alpha_{M,N}$ et $\alpha_{N,L}$. Calculer la somme des angles de T.