MATH 417
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

1. Soit T une tore definie comme:
   $T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x = b\sin(u)\cos(v), y = b\sin(u)\sin(b), z = b\cos(u),\ u, v \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$.
   i. Déterminer l'image de l'application Gauß de T.
   ii. Montrer que
   $$\int_T K_T \, dS = 0$$
   sans utiliser le théorème de Gauß-Bonnet.
   iii. Calculer la caractéristique de Euler de T et verifier Gauß-Bonnet.
2. Calculer la caractéristique de Euler de S definie comme:
   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$$
3. Montrer que l'aire d'un polygone avec k sommets sur S^2 est éale à la somme de ses angles moins $(k-2)\pi$.
4. Soient $p \in S$, T un triangle qui contient p et α, β et γ sont les angles de T. Montrer que
   $$\kappa_{S^2}(p) = \lim_{T \longrightarrow p} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{A(t)};$$
   où $A(T)$ dénote l'aire de T.
5. Montrer que la somme des angles d'un triangle sur une surface de courbure positif est supérieure à π, et sur une surface de courbure négative est inférieure à π.
6. Soit
   $$S = \{(x, y, z) = (\operatorname{sech}(u)\cos(v), \operatorname{sech}(u)\sin(v), u - \tanh(u)) \in \mathbf{R}^3 \colon u, v \in \mathbf{R} \times [0, 2\pi]\}.$$
   Calculer l'aire de S.
7. Soient $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$ les points de S^2. On note φ_N la projection stereographique de pôle N et φ_S la projection stereographique de pôle S qui, à chaque point p de S^2, distinct de N (et S, respectivement) fait correspondre le point d'intersection de la droite pN (et pS, respectivement) avec le plan d'equation $z = 0$.
   i. Montrer que $(S^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$ et $(S^2 \setminus \{S\}), \varphi_S$ constituent un atlas.
   ii. Déterminer l'application de changement de carte: $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$.