MATH 417
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

1. Soient M et N deux variétés de classe C^k de dimension m et n respectivement. Montrer que le produit cartésien, $M \times N$, de M et N est une variété de classe C^k.
2. Soit M une variété de classe C^k. Montrer que l'entier k ne dependent pas de la carte locale (U, φ).
3. On fixe deux entiers n et k et un espace vectoriel V de dimension n sur $\mathbf{R}$. Soit $G(k,n)$ est l'ensemble des sous-espaces de dimension k de V. $G(k,n)$ est appelé grassmannienne des k-plans de V. Montrer que $G(k,n)$ es une variété lisse.
4. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. Montrer que U est une variété lisse.
5. Soit $U \subset \mathbf{C}^n$ un ouvert. Montrer que U est une variété lisse.
6. Rappeler que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) := \{\gamma \in M^{n\times n} \colon \det(\gamma) \neq 0\}$. On considére $\gamma \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ comme une application $\gamma\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$. Montrer que γ est une difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$.
7. Montrer que le groupe des matrices
$$\mathrm{SU}_2(\mathbf{C}) := \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) \colon \overline{\gamma}^t\gamma = I_2,\ \det(\gamma) = 1\}$$
   <u>Indication:</u> S^3 est une variété différentielle.
8. Montrer que le groupe des matrices
$$\mathrm{O}(2) = \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) \colon \gamma^t\gamma = I_2\}$$
   est une variété différentielle.
9. Considere $S^1 := \{z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbf{C} \colon x^2 + y^2 = 1\}$. On définit: $f_n \colon S^1 \longrightarrow S^1$ comme $f_n(z) = z^n$; où $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Il est vrai que f est lisse?
10. Rappeler que deux courbes régulières $\gamma_i \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ sont appélés équivalent si
    - $\gamma_i(0) = p$, et
    - $\frac{d}{dt}(\varphi_p \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi_p \circ \gamma_2)(0)$

    où (U_p, φ_p) est une carte locale et $p \in U_p$. Considérer (V_p, ψ_p) une autre carte locale avec $p \in V_p$. Montrer que
$$\frac{d}{dt}(\psi_p \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\psi_p \circ \gamma_2)(0).$$
    c'est-à-dire équivalence de deux courbes est indépendent de la carte.
11. Soit $N = (0,0,1), S = (0,0,-1) \in S^2 \subset R^3$. On considére $U = S^2 \setminus \{N\}$ et $V = S^2 \setminus \{S\}$.
    i. Montrer que U et V sont ouverts de S^2.
    ii. Soit $\varphi_U : U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ et $\varphi_V : V \longrightarrow \mathbf{R}^2$ où φ_U et φ_V sont les applications réciproques correspondants de la projection stéréographique. Montrer que $\mathcal{A} = \{(U, \varphi_U), (V, \varphi_V)\}$ est un atlas de S^2.
    <u>Indication:</u> $\varphi_U(x,y,z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$.
    iii. Trouver k qui satisfait $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}, \varphi_V \circ \varphi_U^{-1} \in C^k$.
    iii. Il est vrai que les atlas $\mathcal{A}$ et $\{(U_i, \varphi_i) \colon i = 1, 2, \cdots 6\}$ sont compatibles?

12. Pour les variétés suivantes
    i. Trouver une courbe régulière $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ au p qui définit la vecteur tangent $\overrightarrow{v}$, et
    ii. Calculer $X_p^{\overrightarrow{v}}(f)$;

    où :

M	p	$\overrightarrow{v} \in T_pM$	f
S^2	$(1,0,0)$	$(0,2,0)$	$f(x,y,z) = x^{417} + 2xy + z$
$\{(\cosh(v)\cos(u), \cosh(v)\sin(u), v)\colon (u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbf{R}\}$	$(1,0,0)$	$(0,-1,0)$	$f(x,y,z) = x + y + z$
$\{(\cos(u), \sin(u), v)\colon (u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbf{R}\}$	$(0,-1,1)$	$(-1,0,1)$	$f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2$
$\{(\sinh(v)\cos(u), \sinh(v)\sin(u), u)\colon (u,v) \in \mathbf{R}^2\}$	$(0,0,pi/2)$	$(1,0,0)$	$f(x,y,z) = e^{x+y+z}$
$\{(u\cos(v), u\sin(v), v)\colon (u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi]\}$	$(0,1,\pi/2)$	$(0,0,1)$	$f(x,y,z) = \sin(x) + \cos(y) + \tan(xyz)$

13. Soit $f\colon S^n \longrightarrow \mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ définie comme $f(a) = [a]$; où $[a]$ est la classe d'équivalence dans $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ du droite passant par l'origine et $a \in S^n$.
    i. Montrer que f est une application lisse.
    ii. Montrer que f est 2 : 1, i.e. $|f^{-1}([a])| = 2$ pour chaque $a \in S^n$.
    iii. On définit la relation déquivalence sur $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ comme:
    $$X = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \sim -X = (-x_1, \cdots, -x_{n+1}).$$
    Montrer que $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ est homeomorphe à
    $$S^n/\sim = \{[X]\colon X \in S^n,\ [X] = \{X, -X\}\}.$$

14. Considère l'application
    $$\begin{aligned} f\colon \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} &\longrightarrow \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \\ [x_0 : x_1] &\mapsto [x_0x_1 : x_0^2 + x_1^2 : x_0^2 - x_1^2] \end{aligned}$$
    i. Montrer que f est bien-définie
    Indication: Pour montrer, on doit vérifier:
    - l'image d'un element de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ ne dépend pas du représentant $(x_0, x_1) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et
    - l'image d'un representant de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ est bien un représentant d'un élément de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$.

    ii. Montrer que f est une application lisse.

15. Deduire version globale de Gauß-Bonnet Théorème en utilisant version locale de Gauß-Bonnet théorème.