MATH 417
ÉNONCÉS DES EXERCICES 7

AYBERK ZEYTİN

1. Soient $M = \mathbf{R}^2_{x_1,x_2}$ et $X(x_1,x_2) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ un champ de vecteur sur M. Écrit X en utilisant les coordonnées $y_1 = x_1 + x_2$ et $y_2 = x_1 - x_2$.
2. Pour $M = \mathbf{R}^3$, considére
$$X = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p \text{ et } Y = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + x_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p$$
Calculer $[X,Y]$ et $[Y,X]$.
3. Pour $M = \mathbf{R}^3$, considére
$$X = -x_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + x_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p \text{ et } Y = x_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + x_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p$$
Calculer $[X,Y]$ et $[Y,X]$.
4. Soit $M = \mathbf{R}^n$. On considére deux champs de vecteurs, X et Y, sur M définie comme:
$$X = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_o}}\right)_p \text{ et } Y = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_1, \cdots, x_n) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p .$$
Montrer que
$$[X,Y] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_{i_o}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p .$$
Écrire cette équation en termes de jacbiennes.
5. Soit M une variété lisse de dimension n et (U,φ) une carte locale de M. Rappeler que pour
$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$
alors
$$\begin{aligned} X|_U &= \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \end{aligned}$$
où $u_1, \cdots, u_n$ sont coordonnées cartesiennes dans U. Montrer que si $Y = \sum_{i=1}^{n} b_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ est une autre champs de vecteur, on a
$$[X,Y]|_U = \sum_{i,j}^{n} \left\{ \left[a_i \left(\frac{\partial}{\partial u_i} b_j\right) - b_i \left(\frac{\partial}{\partial u_i} a_j\right) \right] \frac{\partial}{\partial u_j} \right\}$$
Si $M = U = \mathbf{R}^n$ écrire cette équation en termes de jacbiennes.
6. Soient M une variété lisse, $r \in \mathbf{R}$ et $X, Y, Z \colon M \longrightarrow TM$ trois champs de vecteurs sur M.
   i. Montrer que $[X,Y] = -[Y,X]$
   ii. Montrer que $[rX,Y] = r[X,Y]$
   iii. Montrer que $[X+Y,Z] = [X,Z] + [Y,Z]$
   iv. Montrer que $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$.