Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2012 - Second Semestre – Math 417 - Géométrie Différentielle
Examen Partiel, 2 avril 2013 – Ayberk Zeytin
120 mins. **Nom & Prénom:** ______ **Solutions** ______

Question:	1	2	3	Total
Points:	15	35	5	55
Score:				

Question1 (15 points)
Soit k une constante strictement positive et $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une application de classe C^1 supposeée k-dilatante, i.e.

$$k\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\|$$

pour tout x, y dans $\mathbf{R}^n$.

i. Montrer que f est injective et $f(\mathbf{R}^n)$ est une fermé de $\mathbf{R}^n$.
ii. Montrer que la matrice jacobienne de f est inversible pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.
iii. Déduire que f est une C^1 diffeomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur lui-même.

Solution:

i. (5pts) Supposer que $f(x) = f(y)$ mais $x \neq y$. On a

$$\begin{aligned} 0 &< \|x-y\| \\ &\leq \frac{1}{k}\|f(x)-f(y)\| = 0 \end{aligned}$$

Contradiction!

ii. (5pts) Supposer que $J_f(x)$ n'est pas inversible. Alors il existe un vecteur non nul $v \in T_x\mathbf{R}^n$ telle que $J_f(x)(v) = 0$. C'est a dire qu'il existe une h telle que la limite:

$$0 = \lim_{h \longrightarrow (0,0,\cdots,0)} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Mais, on sait que $k \leq \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|}$, contradiction!

iii. (5pts) Par i., ii. et Theéorème 1 (Théorème d'inversion locale) on sait que f^{-1} existe autour chaque point. Alors, f^{-1} existe. Et par ii. la matrice jacobienne de f^{-1}, $J_{f^{-1}}(x)$, est égal à $J_f(f^{-1}(x))$ qui est non-singulière. On déduit f^{-1} est aussi inversible.

Question2 (35 points)
Rappel que les applications hyperboliques sont définies par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

i. Montrer les identités suivantes:
 i1. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
 i2. $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$
 i3. $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$
ii. Soit $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}^3$ une courbe régulière et $\beta : (a', b') \longrightarrow \mathbf{R}^3$ une reparamétrisation de $\alpha(t)$ avec $\|\frac{d\beta}{ds}\| = 1$, c'est à dire que $\beta(s)$ est une paramétrisation unitaire.

ii1. Montrer que $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\frac{d\alpha}{dt}\|}$.

ii2. Montrer que $\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{d\alpha/dt \cdot d^2\alpha/dt^2}{(d\alpha/dt)^4}$.

ii3. La courbure de α, κ_α est $\frac{\|d\alpha/dt \times d^2\alpha/dt^2\|}{\|d\alpha/dt\|^3}$.

iii. Soit α est une courbe régulière qui définit comme

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ t &\mapsto \big(\cosh(t)\cos(t), \cancel{\sinh(t)}\cosh(t)\sin(t), \sinh(t)\big) \end{aligned}$$

iii1. Montrer que α n'est pas une paramétrisation unitaire.

iii2. Trouver la courbure de α en utilisant (ii3).

iv. Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Montrer que α est une courbe dans S, i.e. $\alpha\colon \mathbf{R} \longrightarrow S$.

v. Trouver deux cartes locales σ_1 et σ_2 d'un ouvert de $\mathbf{R}^2$ à S et on déduire que S est une surface régulière.

vi. Écrire une intégrale de calculer la longeur de α sur S dans $(-1, 1)$.

Solution:

i. (2+2+2pts)

i1.

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left[e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

i2.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh(x) \end{aligned}$$

i3.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \sinh(x) \end{aligned}$$

ii. (3+3+3pts)

$$\begin{tikzcd} t \in (a, b) \arrow[rr, "\alpha"] & & \alpha(t) = \beta(s) \in \mathbf{R}^3 \\ & s \in (a', b') \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

ii1.

On sait $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$ est une paramétrisation unitaire, où $t = h(s)$. On a:

$$\begin{aligned} 1 = \left|\left|\frac{d\beta}{ds}\right|\right| &= \left|\left|\frac{d}{ds}(\alpha \circ h)\right|\right| \\ &= \left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}\right|\right| \\ &= \left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|\left|\left|\frac{dt}{ds}\right|\right| \end{aligned}$$

Alors: $\left|\left|\frac{dt}{ds}\right|\right| = \frac{1}{\left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|}$.

ii2.

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{ds}\left|\left|\frac{d\beta}{ds}\right|\right| &= \frac{d}{ds}\left(\left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|\frac{dt}{ds}\right) \\ &= \left(\frac{d}{ds}\left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|\right)\frac{dt}{ds} + \left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|\frac{d^2t}{dt^2} \\ &= \left(\frac{d}{ds}\left(\left\langle\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right\rangle\right)^{1/2}\right)\frac{dt}{ds} + \left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|\frac{d^2t}{dt^2} \\ &= \frac{2\left\langle\frac{d^2\alpha}{dt^2}\frac{dt}{ds}, \frac{d\alpha}{dt}\right\rangle}{2\left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|}\frac{1}{\left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|} + \left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|\frac{d^2t}{dt^2} \\ &= \frac{dt}{ds}\frac{\left\langle\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \frac{d\alpha}{dt}\right\rangle}{\left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|^2} + \left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|\frac{d^2t}{dt^2} \end{aligned}$$

qui implique le résultat.

ii3. De la même façon

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha &= \left|\left|\frac{d^2\beta}{ds^2}\right|\right| \\ &= \left|\left|\frac{d}{ds}\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}\right)\right|\right| \\ &= \left|\left|\frac{d^2\alpha}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right|\right| \\ &= \cdots \\ &= \frac{\left|\left|\frac{d\alpha}{dt} \times \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right|\right|}{\left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|^3} \end{aligned}$$

iii. (3+3pts)

iii1. $\left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right|$ est:

$$\left[2\sinh^2(t)\cos^2(t) + 2\cosh^2(t)\sin^2(t) + 4\sinh(t)\cosh(t)\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)\right]^{1/2}$$

et au $t = 0$: $\left|\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\right| = \sqrt{0} = 0 \neq 1$.

iii2. $\cdots$

iv. (5pts)

$$\cosh^2(t)\cos^2(t) + \cosh^2(t)\sin(t) - \sinh^2(t) = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1.$$

v. (4pts) On définit $U = \{(x,z) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 - z^2 < 1\}$. On note que U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et considère deux applications:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 \colon U & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,z) & \longrightarrow & (x, \sqrt{1+z^2-x^2}, z) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \sigma_2 \colon U & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,z) & \longrightarrow & (x, -\sqrt{1+z^2-x^2}, z) \end{array}$$

One note que c'est ne pas suffisant. Donc on définit deux aplications plus:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_3 \colon U & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (y,z) & \longrightarrow & (\sqrt{1+z^2-y^2}, y, z) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \sigma_4 \colon U & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (y,z) & \longrightarrow & (-\sqrt{1+z^2-y^2}, y, z) \end{array}$$

Enfin, on note que les applications σ_i sont C^∞, alors S est une surface régulière.

vi. (5pts) On peut utiliser l'application σ_3 pour écrir l'inégrale.

Question3 (5 points)

Bonus Tracer le graphe de S et α.

Solution: