

MATH 115
ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

(1) Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est divisible par 6.

(2) Montrer que si $a.c \mid b.c$, alors $a \mid b$.

(3) Montrer que

(a) Pour $x \in \mathbf{Z}$, $(a, b) = (a, b + ax)$

(b) Si $d \mid a$ et $d \mid b$ avec $d > 0$, on a

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a, b).$$

(c) Deducire que si $(a, b) = g$, alors

$$\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}\right) = 1.$$

(4) Soit $a, b \in \mathbf{Z}$. Montrer que (a, b) est le plus petit élément de l'ensemble $\{ax + by \in \mathbf{N} \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$.

(5) Trouver deux entiers x et y telle que

$$4283x + 6409y = 17.$$

(6) Soit $d = (a, b)$ où $a = 50334$ et $b = 31376$

(a) Calculer d .

(b) Trouver deux entiers x et y telle que $ax + by = d$.

(7) Soit $a, b \in \mathbf{Z}$ et $m \in \mathbf{N}$. Montrer que

$$\text{ppcm}(m.a, m.b) = m.\text{ppcm}(a, b).$$

(8) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Montrer que $4 \nmid (n^2 + 2)$.

(9) Soit n un entier naturel. Calculer $(n, n + 1)$ et $\text{ppcm}(n, n + 1)$ en termes de n .

(10) Soit $a, b \in \mathbf{Z}$. Si $a \mid b$, calculer (a, b) et $\text{ppcm}(a, b)$ en termes de a et b .

(11) Montrer que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(12) Montrer que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(13) Montrer qu'à partir d'un certain rang on a $n^2 < 2^n$.