MATH 115
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

1. Étant donné 51 entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, 100\}$.
   - Démontrer qu'il existe un couple avec somme 101.
   - Démontrer qu'il existe deux entiers voisins (comme 28 et 29).
   - Démontrer qu'il existe un couple avec différence de 50.
2. Montrer que $n! > 2^n$ pour tout $n \geq 4$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2^n} par 7.
4.
   - Trouver la plus grande puissance de 10 qui divise 70!.
   - Soit p un nombre premier. Soit $n \in \mathbf{N}$. Trouver une formule donnant le plus grande puissance k tel que p^k divise $n!$.
5. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $8|(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$.
6. Montrer que pour tous entiers a et b, 3 divise $ab(a^2 - b^2)$.
7. Soit p_n le n-ème nombre premier. Montrer $p_n < 2^{2^n}$.
8. Résoudre le système : $x \equiv 2(\mod 10)$ et $x \equiv 5(\mod 13)$.
9.
   - Trouver tous les entiers n tels que $3n + 4|11n + 8$.
   - Idem pour $n^2 + 3n - 2|n^2 - 6$.
10. La comète A passe tous les 5 ans et a été observée l'année dernière. La comète B passe tous les 8 ans et a été observée il y a 2 ans. La comète C passe tous les 11 ans et a été observée il y a 8 ans. Quelle est la prochaine fois où on pourra observer ces 3 comètes la même année?
11. Déterminer tous les entiers n tels que $4n^2 + 1$ soit divisible par 5 et $n^2 - 3$ par 13.
12. Trouver tous les entiers x tels que
$$\begin{aligned} 7x &\equiv 5(\mod 19) \\ 3x &\equiv 1(\mod 11) \end{aligned}$$
13. Trouver le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13.
14. Déterminer le plus petit entier positif n tel que $2^{52} \equiv n(\mod 11)$.
15. Montrer que $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13.
16. Montrer que pour tout entier naturel n, $2^{2^{6n+2}} + 3$ est divisible par 19.
17. Montrer que $20^{15} - 1$ est divisible par 20801.
18. Montrer que 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
19. Trouver le reste de 3^{1001} quand divisé par 5.
20. Trouver le reste de 347^{1001} quand divisé par 3.
21. Trouver le reste de la division 347^{101} par 101.
22. Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 4z + 3$ n'a pas une résolution. (Indication: Considérer l'équation mod 4.)

23. Montrer que les équations suivants n'a pas de résolution sur $\mathbf{Z}$:
   - $x^2 - 3y = 5$
   - $3x^2 - 4y = 5$
   - $x^2 - y^2 = 2014$.

24. Montrer que:
   - $10 | 11^{10} - 1$.
   - $1100 | 11^{10} - 1$.

25. Montrer que $17 | a^{80} - 1$ pour tout $a \in NN$ avec $(a, 17) = 1$.

26. Montrer que $42 | n^7 - n$. (Indication: Utiliser théorème des restes chinois.)

27. Trouver $x \in \mathbf{Z}$ qui satisfait:
   - $3^{302} \equiv x (\mod 5)$ et $0 \leq x \leq 4$.
   - $3^{302} \equiv x (\mod 7)$ et $0 \leq x \leq 6$.
   - $3^{302} \equiv x (\mod 11)$ et $0 \leq x \leq 10$.
   - $3^{302} \equiv x (\mod 385)$ et $0 \leq x \leq 384$.(Indication: Utiliser théorème des restes chinois.)

28. Trouver $x \in \mathbf{Z}$ qui satisfait:
   - $5^{2003} \equiv x (\mod 7)$ et $0 \leq x \leq 6$.
   - $5^{2003} \equiv x (\mod 11)$ et $0 \leq x \leq 10$.
   - $5^{2003} \equiv x (\mod 13)$ et $0 \leq x \leq 12$.
   - $5^{2003} \equiv x (\mod 1001)$ et $0 \leq x \leq 1000$.(Indication: Utiliser théorème des restes chinois.)

29. Trouver toutes les solutions des systèmes suivantes :
   - $$\begin{aligned} x &\equiv 1 (\mod 3) \\ x &\equiv 3 (\mod 5) \\ x &\equiv 4 (\mod 7) \\ x &\equiv 2 (\mod 1)1 \end{aligned}$$
   - $$\begin{aligned} x &\equiv 997 (\mod 2)001 \\ x &\equiv 998 (\mod 2)002 \\ x &\equiv 999 (\mod 2)003 \end{aligned}$$

30. Trouver le reste de la division de 2^{6754} par 1155.

31. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p + 10$ et $p + 20$, et l'un seulement est divisible par 3.

32. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs (u, v, w) tels que $3u + 13v + 23w = 0$. Montrer que pout tout $(u, v, w) \in E$ on a $v \equiv w (\mod 3)$.

33. Démontrer les affirmations suivantes :
   - pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(5n + 4, 11n + 9) = 1$.
   - pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(5n + 3, 3n + 2) = 1$. (Indication: Justifer que $(5n + 3, 3n + 2) = (2n + 1, 3n + 2)$.)

34. Supposer que deux entiers a et b sont premiers entre eux. Montrer que a^n et b^m sont premiers entre eux pour tout entiers naturels m et n.