Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2013 - Premier Semestre – Math 115 - Fondements de Mathématiques
Examen Final, 06 janvier 2014 – Ayberk Zeytin
180 mins. **Nom & Prénom:** ____________________

Question:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points:	8	13	8	5	13	24	10	81
Score:								

Question 1 (8 points)
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'entiers $n^3 + 2n$ et $n^4 + 3n^2 + 1$ sont premiers entre eux.

Question 2 (13 points)

(a) (5 points) Montrer que l'entiers 1001 et 1001001 ne sont pas premiers.

(b) (8 points) Montrer que l'entiers donnée par:

$$1001, 1001001, 1001001001, \cdots$$

ne sont pas nombres premiers. (Indication: Considerer le polynôme $p_n(x) = 1+x+x^2+\ldots+x^n$.)

Question 3 (8 points)

Trouver tout les résolutions de l'équation:

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599$$

(Indication: Considerer l'équation $\pmod{16}$.)

Question 4 (5 points)

Soit a, b et c entiers. Montrer que si $a^2 + b^2 = c^2$ alors $3|ab$.

Question 5 (13 points)

Rappel qu'un entier n est un *carré parfait* s'il existe un entier k tel que $n = k^2$.

(a) (5 points) Montrer que un entier $n \in \mathbf{N}$ est un carré parfait, alors on ne peut pas écrire n de la forme $4k + 3$, c'est-à-dire il n'existe pas un entier k qui satisfait $n = 4k + 3$.

(b) (8 points) Montrer que aucun des entiers

$$11, 111, 1111, 11111, 111111, \ldots$$

est un carré parfait.

Question 6 (24 points)

Rappel que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; où $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$.

(a) (4 points) Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout $1 \leq k \leq p-1$, $k \in \mathbf{Z}$ $p|\binom{p}{k}$.

(b) (8 points) Démontrer le petit théorème de Fermat, c'est-à-dire montrer que si p est un nombre premier et $a \in \mathbf{Z}$ avec $p \nmid a$, alors $a^p \equiv a \pmod{p}$, en utilisant (a) et raisonnement par récurrence simple.

(c) (4 points) Montrer que $2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$.

(d) (4 points) Montrer que $2^{340} \equiv 1 \pmod{31}$.

(e) (4 points) Montrer que $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$. (Indication: $341 = 11 \cdot 31$.)

Question 7 (10 points)

(a) (6 points) Résoudre dans $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire trouver tous les résolutions du système suivant:

$$\begin{aligned} X &\equiv 1 \pmod{25} \\ X &\equiv 7 \pmod{23} \end{aligned}$$

(b) (4 points) Trouver une résolution du système:

$$\begin{aligned} X &\equiv 1 \pmod{25} \\ X &\equiv 7 \pmod{23} \\ X &\equiv 1 \pmod{3} \end{aligned}$$