Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2013 - Premier Semestre – Math 115 - Fondements de Mathématiques
Examen Partiel 2, 20 décembre 2013 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ____________________

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	6	20	10	24	60
Score:					

Question 1 (6 points)
Trouver un entier x tel que $37x \equiv 1 \mod 101$.

Question 2 (20 points)

Vrai ou faux? Si vrai donner une démonstration, si faux donner un contre-exemple.

(a) (5 points) _____ Si p est un nombre premier et $p|(a^2+b^2)$ et $p|(b^2+c^2)$ alors $p|(a^2-c^2)$.

(b) (5 points) _____ Si p est un nombre premier et $p|(a^2+b^2)$ et $p|(b^2+c^2)$ alors $p|(a^2+c^2)$.

(c) (5 points) _____ Si $(a, b) = 1$ alors $(a^2, ab, b^2) = 1$.

(d) (5 points) _____ Soit p un nombre premier. Si $a^k \equiv b^k (\mod p)$ alors $a \equiv b (\mod p)$.

Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2013 - Premier Semestre – Math 115 - Fondements de Mathématiques
Examen Partiel 2, 20 décembre 2013 – Ayberk Zeytin
120 mins. **Nom & Prénom:** ____________________

Question 3 (10 points)
Étant donné un entier naturel n on considére la relation binaire R_n définie sur $\mathbf{Z}$ par:

$$a \sim_{R_n} b :\Leftrightarrow n|(a-b).$$

(a) (5 points) Montrer que R est une relation d'équivalence

(b) (5 points) Pour $n = 5$ expliciter l'ensemble des classes d'équivalence de R.

Question 4 (24 points)

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $F_n = 2^{2^n} + 1$.

(a) (8 points) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$F_{n+k} - 2 = 2^{2^{n+k}} - 1 = (2^{2^n} - 1)\prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}} + 1) = (F_n - 2)\prod_{i=0}^{k-1} F_{n+i}.$$

(b) (8 points) Montrer que pour tout $n \neq m$ les entiers F_n et F_m sont premiers entre eux, c'est-à-dire $(F_n, F_m) = 1$ pour $n \neq m$.(Indication: Utiliser (a).)

(c) (8 points) Déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers **en utilisant (b)**.