Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2013 - Second Semestre – Math 364
Examen Final, 30 mai 2014 – Ayberk Zeytin
150 mins. Nom & Prénom: ____________________ **No:** ________________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	10	10	30	20	30	100
Score:						

Question 1 (10 points)

Montrez que la série de dirichlet donnée par $-\sum_{n=1}^{\infty} \log(n) n^{-s}$ est convergente pout tout $s \in \mathbf{C}$ avec $\sigma > 1$.

Question 2 (10 points)

Montrez que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge absolument pour $s_o \in \mathbf{C}$ alors la série converge pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $s > s_o$.

Question 3 (30 points)

Par $\Gamma(s)$ on note la function Gamma.

(a) (10 points) Montrez que $\log(\Gamma(1+s)) = -\mathsf{E}s + \frac{\zeta(2)}{2}s^2 - \frac{\zeta(3)}{3}s^3 + \dots$ pour tout $|s| < 1$; où E est la constante d'Euler-Mascheroni ($\lim_{N \longrightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N-1} - \log(N)$).

(b) (10 points) Déterminez les pôles de $\Gamma(s)$ et ses résidus.

(c) (10 points)

Question 4 (20 points)

Pour une série de dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ trouvez une formule qui généralise le produit eulérien de la fonction zeta de Riemann.

Question 5 (30 points)

Démontez que

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

et calculer $\zeta(0)$ et $\zeta(2n)$ où $n \in \mathbf{Z}_{>0}$.