MATH 417
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

(1) Décrire l'intersection des deux surfaces données sous forme d'une courbe régulière, c'est-à-dire trouver une application α qui nous donne l'intersection de deux surfaces suivantes:
- $\{x + 2y + 4z = 4\} \cap \{x^2 + 4y^2 = 4\}$
- $\{x^2 + y + z = 2\} \cap \{xy + 2 = 1\}$
- $\{x^2 + y^2 = 9\} \cap \{z = x + y\}$
- $\{z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \cap \{x + y = 1\}$
- $\{x + y + z = 1\} \cap \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

(2) Dessiner $\alpha : (0, \pi) \longrightarrow \mathbf{R}^3$ définié comme $\alpha(t) = (a\cos(t)\sin(t), a\sin^2(t), bt)$.

(3) Calculer le triédre de Frenet (T, N, B), courbure et torsion pour chaque courbe régulière suivante:
- $\alpha(t) = (t, at^2, bt^3)$, où $a, b \in \mathbf{R}_{>0}$.
- $\alpha(t) = (a\cos(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), a\sin(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$, où $a, b \in \mathbf{R}_{>0}$
- $\alpha(t) = (a\cos^2 t, a\cos t\ \sin t, a\sin t)$
- $\alpha(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), 0)$
- $\alpha(t) = (\frac{4}{5}\cos(t), 1 - \sin(t), -\frac{3}{5}\cos(t))$.

(4) Montrer que si $\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}^3$ une courbe régulière (pas unitaire nécessairement) alors courbure et torsion sont donneés par:

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}$$

et

$$\tau = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

(5) Soit $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}^3$ une courbe régulière. Montrer que $\kappa_\alpha = 0$ pour tout $t \in (a, b)$ si et seulement si α est une droite.