MATH 417
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\}$.
- Montrez que S est une surface régulière.
- Trouvez une base pour l'espace vectoriel $T_{(2,0,4)}S$.
- Trouvez une base pour l'espace vectoriel $T_{(0,2,4)}S$.
- Trouvez une base pour l'espace vectoriel $T_{(1,1,2)}S$.
- Trouvez une base pour l'espace vectoriel $T_{(x,y,z)}S$ pour $(x, y, z) \in S$ quelconque.
- Trouvez la champ de vecteur normal de S

(2) Soit $S = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. On a définit deux clasees de carte locale pour S: $(S^2, \{\varphi, \overline{\varphi}\})$ et $(S^2, \{\sigma_1, \overline{\sigma_1}, \sigma_2, \overline{\sigma_2}, \sigma_3, \overline{\sigma_3}\})$.
- Trouvez une base pour l'espace vectoriel $T_{(1,0,0)}S^2$ en utilisant φ et $\overline{\varphi}$. On les note par v_1 et v_2.
- Trouvez une base pour l'espace vectoriel $T_{(1,0,0)}S$ en utilisant σ_i et $\overline{\sigma_i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. On les note par ω_1 et ω_2.
- Soit $v = av_1 + bv_2 \in T_{(1,0,0)}S^2$ un vecteur tangent, où $a, b \in \mathbf{R}$. Est-ce que vous pouvez écrire v en utilisant ω_1 et ω_2? Si oui, trouver $a', b' \in \mathbf{R}$ tels que $v = a'\omega_1 + b'\omega_2$.
- Trouvez une base pour l'espace vectoriel $T_{(0,1,0)}S^2$ en utilisant φ et $\overline{\varphi}$.
- Trouvez une base pour l'espace vectoriel $T_{(,1,0)}S$ en utilisant σ_i et $\overline{\sigma_i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.
- Soit $v = av_1 + bv_2 \in T_{(0,1,0)}S^2$ un vecteur tangent, où $a, b \in \mathbf{R}$. Est-ce que vous pouvez écrire v en utilisant ω_1 et ω_2? Si oui, trouver $a', b' \in \mathbf{R}$ tels que $v = a'\omega_1 + b'\omega_2$.
- Trouvez une base pour l'espace vectoriel $T_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}S^2$ en utilisant φ et $\overline{\varphi}$.
- Trouvez une base pour l'espace vectoriel $T_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}S$ en utilisant σ_i et $\overline{\sigma_i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.
- Soit $v = av_1 + bv_2 \in T_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}S^2$ un vecteur tangent, où $a, b \in \mathbf{R}$. Est-ce que vous pouvez écrire v en utilisant ω_1 et ω_2? Si oui, trouver $a', b' \in \mathbf{R}$ tels que $v = a'\omega_1 + b'\omega_2$.

(3) Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction lisse, c'est-à-dire de classe C^∞. Montrez que la champ de vecteur normal de la surface régulière $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon z = f(x, y)\}$ est donnée par:

$$\mathbf{n}(x, y) = \frac{\langle -f_x(x, y), -f_y(x, y), 1\rangle}{\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}}$$