MATH 417
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

(1) Calculer 1e et 2e formes fondamentales des surfaces suivantes:
- ▶ $\sigma(u,v) = (\sinh(u)\sinh(v), \sinh(u)\cosh(v), \sinh(u))$
- ▶ $\sigma(u,v) = (u-v, u+v, u^2+v^2)$
- ▶ $\sigma(u,v) = (\cosh(u), \sinh(u), v)$

(2) Soit $S = \{z = x^2 + y^2\}$.
- ▶ Calculer la 1e et 2e forme fondamentale de S.
- ▶ Décrire l'image de l'application Gauß de S.
- ▶ Écrire les équations de Weingarten pour S.
- ▶ Calculer courbure moyenne et Gaußienne de S.
- ▶ Calculer l'aire de D; où $D = \{(x,y,z) \in S \colon z \leq 1\}$.

(3) Pour un $\alpha \in (0, \pi/2)$ fixé on définit la surface S_α comme l'image de l'application

$$\sigma_\alpha(r,\theta) = (r\sin(\alpha)\cos(\frac{\theta}{\sin(\alpha}), r\sin(\alpha)\sin(\frac{\theta}{\sin(\alpha)}), r\cos(\alpha)).$$

- ▶ Calculer la 1e et 2e forme fondamentale de S_α
- ▶ Est-ce que vous pouvez trouver une fonction $f_\alpha(x,y,z)$ telle que $S_\alpha = \{f_\alpha = 0\}$.

(4) Soient $f, g \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions lisses. Considérez la surface, S, donnée par l'image de l'application

$$\sigma(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u)).$$

Supposer que $f(u) > 0$ pour tout $u \in \mathbf{R}$ et $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$.
- ▶ Calculer 1e de 2e forme fondamentale de S.
- ▶ Montrer que la courbe $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$ est une courbe unitaire sur S
- ▶ Si $a < b \in \mathbf{R}$ calculer la longeur de la courbe $\alpha|_{(a,b)}$.
- ▶ Calculer courbure moyenne et Gaußienne de S.

(5)
- ▶ Définir, mathématiquement, un difféomorphisme local φ entre deux surfaces régulières.
- ▶ Soient $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } z > 0\}$ et $\mathcal{P} = \{(0,y,z) \colon y > 0\}$. Décrire geometriquement l'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathcal{P} &\longrightarrow S \\ (0,y,z) &\longmapsto (y\cos(z), y\sin(z), y). \end{aligned}$$

- ▶ Décider si φ est un difféomorphisme locale. Est-ce que φ un difféomorphisme local?
- ▶ Décider si φ est une isométrie locale. Est-ce que φ une isométrie locale?

(6) Décider si les surfaces suivantes sont compactes ou non:
- ▶ $S_1 = \{x^2 + y^2 + z^4 = 1\}$
- ▶ $S_2 = \{x^2 - y^2 + z^4 = 1\}$

Est-ce que vous pouvez les dessiner?

(7) Soient $S = \{x^2 + y^2 = z^2\}$ et $\mathcal{P} = \{(0,y,z) \in \mathbf{R}^2 \colon y > 0\}$.

(8) Soient $S = S^2$ et $D = \{(x,y,z) \in S^2 \colon z \geq 0\}$. Calculer l'aire de D.

(9) Pour $S = S^2$ choisir une triangulation de S^2 pour calculer $\chi(S^2)$ et vérifier théorème de Gauß-Bonnet, c'est-à-dire montrer que

$$\iint_{S^2} \kappa_{S^2}\, dS = 2\pi\chi(S^2)$$

(10) Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière et soit $a \in \mathbf{R}_{>0}$ un constant. Définir

$$\begin{aligned} \varphi_a \colon S &\longrightarrow S' \\ (x, y, z) &\mapsto (ax, ay, az) \end{aligned}$$

Déterminer la relation entre les 1e et 2e formes fondamentales de S et S'; oè $S' = \{(ax, ay, az) \colon (x, y, z) \in S\}$.

(11) Soient $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } z > 0\}$ et $S_2 = \{z = 0\}$. Considérer l'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon S_1 &\longrightarrow S_2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, 0) \end{aligned}$$

Décider si φ une isométrie ou non. Si non est-ce que vous pouvez trouver une isométrie entre S_1 et S_2?