Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2012 - Second Semestre – Math 417 - Géométrie Différentielle
Examen Partiel, 2 avril 2013 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ____________________

Question:	1	2	Total
Points:	50	35	85
Score:			

Question1 (50 points)

On définit $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. De façon analogue à les fonctions trigonométriques, soit $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$, $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ et $\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$. Soit

$$\alpha(t) = \left(\log\left(\cosh\left(t\right)\right), 0, 2\arctan\left(\tanh\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right).$$

(a) (10 points) Montrez les identités suivantes:

- $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$

- $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$

- $\frac{d}{dx}\tanh(x) = \operatorname{sech}(x)$

- $\tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$

- $\frac{\operatorname{sech}(x/2)^2}{1+\tanh(x/2)^2} = \operatorname{sech} x$

(b) (10 points) Montrez que α est une courbe unitaire.

(c) (10 points) Considérez $\beta(t) = \alpha'(t)$ comme une courbe régulière dans $\mathbf{R}^3$. Montrez que la courbure κ_β de β est

$$\kappa_\beta = \left(1 + \frac{\tau_\alpha^2}{\kappa_\alpha^2}\right)^{1/2} ;$$

où τ_α et κ_α sont la torsion et courbure de α, respectivement.

(d) (10 points) Montrez que la torsion, τ_β de β est:

$$\tau_\beta = \frac{\frac{d}{dt}\frac{\tau}{\kappa}}{\kappa(1+\frac{\tau^2}{\kappa^2})};$$

où τ_α et κ_α sont la torsion et courbure de α, respectivement.

(e) (10 points) Montrez que si γ est une courbe unitaire quelconque et $\delta(t) = \gamma'(t)$, alors la courbure de δ est

$$\kappa_\delta = \left(1 + \frac{\tau_\gamma^2}{\kappa_\gamma^2}\right)^{1/2} \quad ;$$

où τ_γ et κ_γ sont la torsion et courbure de γ, respectivement.

Question2 (35 points)

Une surface de révolution, S_α, est une surface dans $\mathbf{R}^3$ balayée par la rotation d'une courbe plane α, appelée méridienne. En plus, si le méridienne est paramétrée par $\alpha(t) = (0, \alpha_2(t), \alpha_3(t))$, alors S_α peut être donée par l'image de l'application:

$$\sigma\colon\ (\alpha_2(t)\cos(\theta), \alpha_2(t)\sin(\theta), \alpha_3(t)).$$

Pour $t \in [0, 2\pi]$ on définit $\alpha(t) = (0, \cos(t) + 2, \sin(t))$.

(a) (10 points) Montrez que S_α est une surface réguliere en trouvant cartes locales.(Indication: Deux cartes locales sont suffisants.)

(b) (10 points) Pour $\varphi \in \mathbf{R}$ quelconque soit $M = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que $M(S) = S$.

(c) (10 points) Calculer la matrice g en fonction de α_2 et α_3 pour UNE carte locale.

(d) (5 points) (Bonus) Dessiner S.