Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2013 - Second Semestre – Math 417 - Géométrie Différentielle
Examen Final, 30 mai 2014 – Ayberk Zeytin
150 mins. Nom & Prénom: ____________________ **No:** ________________

Question:	1	2	Total
Points:	82	20	102
Score:			

Question 1 (82 points)

Soit $S_{a,b} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$; où $a, b \in \mathbf{R}_{>0}$.

(a) (6 points) Montrez que la courbe $\alpha_{a,b}(s) = (a\cos(\frac{s}{a}), b\sin(\frac{s}{b}), 1)$ avec $s \in (-\pi, \pi)$ est une courbe unitaire sur $S_{a,b}$.

(b) (9 points) Calculez la triedre de Frenet, notée par $(\mathsf{T}, \mathsf{N}, \mathsf{B})$, de $\alpha_{a,b}$.

(c) (9 points) Soit $\omega(s) = \tau(s)\mathsf{T}(s) + \kappa(s)\mathsf{B}(s)$. Montrez les identités suivantes:

- $\omega \times \mathsf{T} = \mathsf{T}'$

- $\omega \times \mathsf{N} = \mathsf{N}'$

- $\omega \times \mathsf{B} = \mathsf{B}'$

(d) (6 points) Trouvez une carte globale pour $S_{a,b}$.

(e) (9 points) Décrivez l'application de Gauß, notée par $N_{a,b}$, de $S_{a,b}$.

(f) (9 points) Décrivez la seconde forme fondamentale, notée par $\sigma_{(x,y,z)}$, de $S_{a,b}$.

Soient $t(s) = \alpha'(s)$, $n(s) = (N_{a,b} \circ \alpha)(s)$ et $b(s) = t(s) \times n(s)$.

(g) (10 points) Montrez que l'ensemble $\{t, n, b\}$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$ pour tout s.

(h) (12 points) Montrez que:

- $t'(s) = \sigma_{\alpha_{a,b}(s)}(t(s), t(s))n(s)$

- $n'(s) = -\sigma_{\alpha_{a,b}(s)}(t(s), t(s))t(s) - \sigma_{\alpha_{a,b}(s)}(t(s), b(s))b(s)$

- $b'(s) = \sigma_{\alpha_{a,b}(s)}(t(s), b(s))n(s)$

(i) (12 points) Montrez qu'il existe un unique θ tel que:

$$\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Question 2 (20 points)

Soit $\mathsf{M} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \colon x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \text{ et } x_1 + x_3 = x_2 + x_4\}$.

(a) (10 points) Montrez que M est une variété différentielle de dimension 2.

(b) (10 points) Trouvez une base de T_pM où $p = (4, 1, 1, 4)$.