MATH 115
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Soient E et F deux ensembles et $f\colon E \longrightarrow F$ une fonction. On définit une relation $R_f \subset E \times E$ comme:
$$(x, y) \in R_f :\Leftrightarrow f(x) = f(y).$$
Dans ce cas on ecrit $x \sim y$(ou xRy), aussi. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

(2) Décider si les relations suivantes symétriques? réflexives? transitives?
- sur $\mathbf{R}$, "avoir le même sinus"
- sur l'ensemble de droites du plan, l'orthogonalité

(3) Soit E un ensemble et R_1 et R_2 sont deux relations d'équivalence sur E. Montrer que la relation R définie par
$$xRy :\Leftrightarrow xR_1y \text{ et } xR_2y$$
est une relation déquivalence sur E, aussi.

(4) Soit $E = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. On définit la relation sur E comme:
$$(x_1, x_2)R(y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1.$$
Montrer que R est une relation d'équivalence. Décrire $E/\sim$, c'est-à-dire les classes d'équivalence.

(5) Soit $E = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$. On définit la relation sur E comme:
$$(x_1, x_2)R(y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_2 = y_2.$$
Montrer que R est une relation d'équivalence. Décrire $E/\sim$.

(6) Soit $C(\mathbf{Q}) := \{f\colon \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}\}$. Pour $f, g \in C(\mathbf{Q})$ on dit que $fRg :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbf{Q}$. Décider si R est une relation d'ordre?

(7) Sur $E = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ on définit:
$$(x_1, x_2)R(y_1, y_2) :\Leftrightarrow y_1 \leq x_1 \text{ et } y_2 \leq x_2.$$
Décider si R est une relation d'ordre?

(8) Soient X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de sous-ensembles de X. Sur $E = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ on définit la relation R comme:
$$ARB :\Leftrightarrow A = B \text{ ou pout tout } a \in A \text{ et pour tout } b \in B, a \leq b.$$
Vérifier que R est une relation d'ordre.

(9) Soit X un ensemble. On fixe une partie A de X. Sur $E = \mathcal{P}(X)$ on définit:
$$YRZ :\Leftrightarrow Y \cup A = Z \cup A$$
- Montrer que R est une relation d'équivalence.
- Décrire la classe d'équivalence de A si $A = \emptyset$.
- Décrire la classe d'équivalence de A si $A = X$.
- Décrire la classe d'équivalence de A, sinon.

(10) Montrer qu'il existe 4 entiers naturels a, b, c, d tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a+n$, $b+n$, $c+n$ et $d+n$ ne sont pas premiers entre eux deux à deux.

(11) Trouver tout les nombres premiers $p \in \mathbf{N}$ tels qu'il existe a, b et x, y qui satisfont $p = a^2 - b^2$ et $p = x^2 + y^2$, où a, b, x, y sont nombres premiers, aussi.

(12) Trouver 4 solutions d'équation:
$$p^2 + 1 = q^2 + r^2$$
où p, q, r sont nombres premiers.

(13) Trouver tout $n \in \mathbf{N}$ pour lequel l'entiers $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13, n+15$ sont premiers.

(14) Trouver le plus petit entier naturel n tel que $n^4 + (n+1)^4$ est compose.

(15) Pour $n \geq 2$, montrez que $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ n'est pas un entier. <u>Indication:</u> Montrez que a_n est le quotient d'un naturel pair par un naturel impair.

(16) Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. On choisit $n+2$ entiers distincts, $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ tel que $a_i \leq 2n$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n+2\}$.
- Montrer que l'au au moins est égal à la somme de deux autres.
- Est-ce encore vrai si on en choisit seulement $n+1$?

(17) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définié par $a_1 = 1$ et

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= a_n \\ a_{2n+2} &= a_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

Montrer que si x et y sont deux entiers naturels avec $(x, y) = 1$, alors il existe un entier naturel n_o tel que $a_{n_o} = x$ et $a_{n_o+1} = y$. (<u>Indication:</u> Utiliser récurrence *forte* sur le valeur de $x + y$.)

(18) Trouver l'erreur dans la raisonnment (récurrence d'ordre 2) suivant: On va montrer que P(n) = n points deux à deux distincts quelconques du plan sont toujours alignés.
- Pour $n = 1$ et $n = 2$ la propriété est vraie.
- Supposons que P(k) est vraie pour tout $k \leq n$.
- On considère alors $n+1$ points quelconques sur le plan qui sont deux à deux distincts. On les appele $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$
- Par l'hérédité on sait que $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont alignés sur une droite ℓ_1.
- Par l'hérédité on sait que $a_2, a_2, \ldots a_{n+1}$ sont alignés sur une droite ℓ_2.
- $\ell_1 \cap \ell_2$ contient au moins deux points distincts, donc $\ell_1 = \ell_2$.
- Par suite $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sont alignés.
- Récurrence etablie.

(19) Montrer que pout tout entier naturel $n \geq 2$ on a:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

(20) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(21) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

Montrer que $a_n = 1 + 2^{n-1}$.

(22) On définit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

- Calculer a_2, a_3, a_4 et a_5.
- Montrer que $a_n = 2^{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

(23) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 15$, montrer que

$$\frac{1}{2^n} \geq \frac{3^n}{n!}$$

(24) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ démontrer que $3 | 4^n + 2$.