Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2014-2015 Premier Semestre – Math 115 - Fondements des Mathématiques
Examen partiel, décembre 18, 2014 – Ayberk Zeytin
100 mins. Nom & Prénom: ______________________

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	10	11	20	16	57
Score:					

Question1 (10 points)

Soit n un entier naturel impair. Montrez que n et $n+2$ sont nombres premiers si et seulement si $n \nmid (n-1)!$ et $(n+2) \nmid (n-1)!$.

Question2 (11 points)

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définié par: $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

(a) (3 points) Calculer a_2, a_3 et a_4.

(b) (8 points) Montrez que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leq 2^{n-1}$.

Question3 (20 points)

Sur $\mathsf{E} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ on définit la relation:

$$(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2.$$

(a) (8 points) Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence.

(b) (4 points) Déterminer $[(0,0)]$ et $[(1,0)]$.

(c) (8 points) Décrire l'ensemble $\mathsf{E}/\sim$.

Question4 (16 points)

(a) (8 points) Montrez que si $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{Z}$ tels que $x_i \equiv 1 \pmod 6$ pout tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ alors le produit vérifie $x_1 x_2 \dots x_n \equiv 1 \pmod 6$

(b) (8 points) Montrez qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k + 5$.