MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

(1) Donner la définition d'un corps. Les opérations binaires $+$ et $\cdot$, sont-elles équivalentes dans la définition ?

(2) Si $x \cdot y$ est inversible dans un anneau A, alors x et y sont inversibles (rappelez qu'un élement, $x \in A$ est dit inversible s'il existe $x' \in A$ tel que $xx' = 1_A$).

(3) Dans un anneau, un élément inversible n'est pas diviseur de zéro et un diviseur de zéro n'est pas inversible.

(4) Trouver toutes les solutions des équations :
  (a) $ax + b = c$ $(a, b, c \in K$, K est un corps);
  (b) $2x \equiv 3\mathcal{M}od(1)0$ et $2x \equiv 6\mathcal{M}od(1)0$ dans l'anneau $\mathbf{Z}_{10} = \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.

(5) Soit A un anneau. Démontrer que :
  (a) $\forall a \in A \ \ 0_A \cdot a = 0_A$;
  (b) $(-1_A) \cdot a = -a$;
  (c) $|A| \geq 2 \iff 1_A \neq 0_A$ dans A.

(6) Lesquels de ces sous-ensembles donnés de $\mathbf{C}$ sont des anneaux ? Lesquels sont des corps ?
  (a) $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} 10^{-n}\mathbf{Z}$;
  (b) $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*, (m, n) = 1, p \nmid n\}$ (p est un nombre premier fixé) ;
  (c) $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{-1}$, $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{2}$;
  (d) $\mathbf{Q}[\sqrt{-1}] = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\sqrt{-1}$, $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\sqrt{2}$.

(7) Démontrer que les éléments inversibles d'un anneau A forment un groupe multiplicatif, noté par $(A^\times, \cdot)$. Trouver le groupe $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.

(8) Montrer que le groupe $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]^\times$ est infini.

(9) Un élément a d'un anneau A s'appelle nilpotent, s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $a^n = 0$. Trouver tous les éléments inversibles, les diviseurs de zéro, les nilpotents des anneaux suivants :
  (a) $\mathbf{Z}/360\mathbf{Z}$;
  (b) $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$;
  (c) Démontrer que, pour tout nilpotent x de A, l'élément $1 + x$ est inversible.

(10) Montrer que les éléments nilpotents d'un anneau forment un idéal.

(11) Soit I un idéal d'un anneau A. On note par $(a) = a \cdot A$ l'idéal principal engendré par a. Montrer que :
  (a) $(a) = A$ si et seulement si a est inversible;
  (b) Un anneau A est un corps si et seulement si (0) est le seul idéal propre de A.

(12) (a) Soient I, J deux idéaux d'un anneau A. Montrer que

$$I \cap J, \qquad I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

  sont des idéaux de A.
  (b) Montrer que $I + J$ est le plus petit idéal de A contenant I et J.
  (c) Soit $n, m \in \mathbf{Z}$, $I = (n) = n\mathbf{Z}$, $J = (m) = m\mathbf{Z}$. Trouver $I \cap J$ et $I + J$.
  (d) Montrer que

$$I \cdot J = \{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n \mid n \in \mathbf{N},\ x_k \in I,\ y_k \in J \text{ pour } 1 \leq k \leq n\}$$

  est un idéal. Il s'appelle *produit des idéaux* I et J.
  (e) On considère les idéaux $I = (x_1, \ldots x_n) = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ et $J = (y_1, \ldots y_m) = Ay_1 + \cdots + Ay_m$. Décrire les idéaux $I + J$, $I \cdot J$, I^2 en fonction de x_k, y_l.

(13) Soit A un anneau quelconque. Montrer que l'anneau de polynômes $A[x]$ n'est pas un corps.

(14) Démontrer que les anneaux $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ ne sont pas isomorphes.

(15) Démontrer que les anneaux $\mathbf{Z}[x]$ et $\mathbf{Q}[x]$ ne sont pas isomorphes.

(16) Trouver tous les homomorphismes de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$.

(17) Lesquels de ces sous-ensembles donnés de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ sont des idéaux ?
- (a) $\{(a, a) : a \in \mathbf{Z}\}$
- (b) $\{(2a, 2b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$
- (c) $\{(2a, 0) : a \in \mathbf{Z}\}$
- (d) $\{(a, -a) : a \in \mathbf{Z}\}$

(18) Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme. Montrer que
- (a) si $J \subset S$ est un idéal de S alors $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal de R.
- (b) si φ est surjective et I est un idéal de R alors $\varphi(I)$ est un idéal de S. Donner un exemple pour démontrer que si φ n'est pas surjective alors $\varphi(I)$ n'est pas nécessairement un idéal de S.