MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

(1) Montrer que si $I \leq A$ est un idéal d'un anneau commutatif A qui ne contient pas de diviseur de zéro alors A est un anneau intégre.

(2) Trouver le $\mathrm{pgcd}(x^n - 1,\ x^m - 1)$ dans $\mathbf{Z}[x]$.

(3) Trouver le $\mathrm{pgcd}(f, g)$ dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[x]$ et sa représentation linéaire $fu + gv$ où $d, u, v \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[x]$:

(a)
$$f = x^5 + x^4 + 1, \qquad g = x^4 + x^2 + 1;$$

(b)
$$f = x^5 + x^3 + x + 1, \qquad g = x^4 + 1.$$

(4) Trouver le $\mathrm{pgcd}(f, g)$ dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[x]$ et $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}[x]$ de $f = x^4 + 1$, $g = x^3 + x + 1$.

(5) Soit A un anneau commutatif avec $1 \in A$ et soit $f(x) \in A[x]$.

(a) Montrer que l'application
$$\pi\colon A[x] \longrightarrow A[x]/(f(x))$$
définie par $\pi(p(x)) = p(x) + (f(x))$ est un homomorphisme.

(b) Montrer que $\ker(\pi) = (f(x))$.

(c) On suppose que $\deg(f(x)) = n$. Montrer que si $p(x)$ et $q(x)$ sont deux polynômes qui satisfont $\deg(p(x)) < n$ et $\deg(q(x)) < n$ alors $\pi(p(x)) \neq \pi(q(x))$.

(d) On pose maintenant que $A = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $f(x) = x^2 + x + 1$. Montrer que $A[x]/(f(x))$ a 4 éléments.

(e) Écrire table d'addition pour $A[x]/(f(x))$. Est-que vous connaissez le groupe $(A[x]1/(f(x)), +)$.

(f) Écrire table d'multiplication pour $(A[x]/(f(x)))^{\times}$. Est-que vous connaissez cet groupe.

(6) Soit $A = \mathbf{Z}$ et $f(x) = x^4 - 16 \in A[x]$. Trouver un représentant, $q(x)$, du classe $p(x) + (f(x))$ (c'est-à-dire $q(x) \in \mathbf{Z}[x]$ qui satisfait $p(x) + (f(x)) = q(x) + (f(x))$) tel que $\deg(q(x) < 4$; où $p(x) = 7x^{13} - 11x^9 + 5x^5 - 2x^3 + 3$.

(7) Supposons que A est un anneau intégre avec $|A| < \infty$. Montrer que si $\wp \leq A$ est un idéal premier de A alors $\wp$ est maximal.

(8) Soit A un anneau commutatif. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) A a exactement un idéal premier,

(b) si $\alpha \in A$ alors α est soit inversible soit nilpotent.