MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Soit $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable (c'est-à-direde classe C^∞) pour $n = 1, 2$.
   (a) Rappeler le théorème de Taylor pour $n = 1$ et $n = 2$.
   (b) Pour $a = (a_1, a_2)$ écrire la série de Taylar de f.
   (c) On fixe $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que $f(a_1, a_2) = 0$ si et seulement si on peut trouver fonctions g_1 et g_2 telles que $f = (x_1 - a_1) \cdot g_1 + (x_2 - a_2)g_2$.
   (d) Montrer que l'ensemble des fonctions différentiable en (a_1, a_2) forme un anneau.
   (e) Déduire que l'ensemble des fonctions $f(x_1, x_2)$ tels que $f(a_1, a_2) = 0$ forment un idéal, $\wp$.
   (f) Montrer que l'idéal $\wp = (x_1 - a_1, x_2 - a_2)$.
   (g) Pouvez-vous généraliser les questions précédentes pour $n \in \mathbf{N}$ quelconq.

(2) Soit A un anneau. Montrer que les idéaux premiers de A a un élément minimal par rapport à inclusion.

(3) Soit A un anneau. Montrer que les suivantes sont équivalentes:
   (a) A un seul idéal premier,
   (b) a est soit inversible soit nilpotent pour tout $a \in A$,
   (c) $A/\mathrm{Nil}(A)$ est un corps.

(4) Soit $n \in \mathbf{N}$ avec $n = a^k b$, où $a, b \in \mathbf{N}$. Montrer que l'élément $ab \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est nilpotent.

(5) Déterminer tout les éléments nilpotents dans
   (a) $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$
   (b) $\mathbf{Z}/32\mathbf{Z}$
   (c) $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$
   (d) $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}[x]$
   (e) $\mathbf{Z}/32\mathbf{Z}[x]$
   (f) $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}[x]$

(6) Soit $a \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, où $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ avec p_i sont des entiers distincts et $n_i \geq 1$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, k$. Montrer que a est nilpotent si et seulement si $p_i | a$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

(7) Soient $X \neq \emptyset$ un ensemble, k un corps et R l'ensemble des fonctions $f\colon X \longrightarrow k$.
   (a) Montrer que R est un anneau commutatif avec $1 \in R$. Déterminer l'identité (par rapport à *multiplication*) de R.
   (b) Montrer que si $f\colon X \longrightarrow k$ est un élément nilpotent de R alors $f \equiv 0$.

(8) Soit $a \in A$ un nilpotent dans un anneau commutatif A. Montrer que:
   (a) ra est nilpotent pour tout $r \in R$.
   (b) $1 + a$ est inversible dans A
   (c) $u + a$ est inversible dans A si $u \in A$ est inversible (c'est-à-dire il existe $w \in A$ tel que $uw = 1$.)