

MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYDIN

(1) Trouver A un anneau intègre et deux ensembles multiplicatives S et T tels que:

$$S^{-1}A = T^{-1}A.$$

(2) Dans $A = \mathbb{C}[X]$, soit $\wp = (X)$ et $S = \{X^n : n \in \mathbb{N}\}$.

- Montrer que \wp est maximal (et en particulier premier).
- Comparer A_\wp et $S^{-1}A$. Sont-ils isomorphes?

(3) Soient k, k' deux corps, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ deux éléments de $A = k \times k'$.

- Est-ce que $A = k \times k'$ un corps.
- Montrer que $S = \{e_1\}$ est multiplicatif.
- Déterminer $S^{-1}A$.

(4) Pour $A = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2)$ et $S = \{a(X) + b(X) \cdot Y : a(X) \neq 0\}$, montrer que:

- S est multiplicatif, et
- $S^{-1}A \cong \mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2)$.

(5) Soient $A = \mathbb{Z}$ et $S = \mathbb{Z} \setminus (p)$ où p est un nombre premier.

- i. Décrire $B = S^{-1}A$. Trouver quelques un idéal premier dans B .
- ii. Soit I un idéal de \mathbb{Z} . Montrer que $S^{-1}I$ est une idéal de $B = S^{-1}A$.
- iii. De plus, montrer que pour tout les idéaux, J , de B il existe un idéal, I , de A tel que $J = S^{-1}I$.
- iv. Si \wp un idéal premier de A alors $S^{-1}\wp$ est un idéal premier de $S^{-1}A$.
- v. Généraliser i.-iv. pour A quelconq.