MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Soit p un nombre premier. Montrez que $A = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ est un anneau local pour tout $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Trouver l'idéal maximal de A.

(2) Soit $C^0(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, et soit $= \{f \in C^0(\mathbf{R})\colon f(1) \neq 0\}$.
- Montrez que $C^0(\mathbf{R})$ est un anneau. Écrivez explicitement les identités par rapport à addition et multiplication.
- Décider si $C^0(\mathbf{R})$ est un anneau intègre ou pas.
- Montrez que S est multiplicatif.
- Montrez que $S^{-1}C^0(\mathbf{R})$ est un anneau local.

(3) Soient A un anneau intègre, $f, g \in A$ et $S_f = \{1, f, f^2, \ldots\}$ et $S_g = \{1, g, g^2, \ldots\}$.
- Montrez que s'il existe $h \in A$ tel que $f = gh$ alors la fonction:

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon S_f^{-1}A & \longrightarrow & S_g^{-1}A \\ (a, f^N) & \mapsto & ah^N, g^N \end{array}$$

  est un homeomorphisme.
- Montrez que si $g = f^M$ pour certain $M \in \mathbf{N}$, alors l'homeomorphisme φ est un isomorphisme.

(4) Soit $A = \mathbf{C}[X]/(X^2)$.
- Montrez que A est un anneau local.
- Trouver l'unique idéal maximal de A.

(5) Soient A un anneau intègre, $S \subseteq A$ un sous-ensemble multiplicatif et I un idéal de A tel que $S \cap I = \emptyset$.
- Montrez que $S^{-1}I = \{[i, s]\colon i \in I \text{ et } s \in S\}$ est un idéal de $S^{-1}A$.
- Montrez que l'homomorphisme $\varphi\colon S^{-1}A/S^{-1}I \longrightarrow \bar{S}^{-1}(R/I)$ est un isomorphisme où $\bar{S}$ est l'image de S sous la projection canonique $\pi\colon R \longrightarrow R/I$.