MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 0

A. ZEYTİN

On rappel les critères suivantes:

Theorem 1 (Critère de comparaison). *Soient* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *deux séries positives à partir d'un certain rang* $N \in \mathbf{N}$, *(c'est-à-dire il existe un* $N \in \mathbf{N}$ *tel que* $z_n \geq 0$ *et* $w_n \geq 0$ *pour tout* $n > N$,*) tels que pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *on a* $z_n \leq w_n$. *Alors:*

- *si* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *diverge alors* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *diverge, et*
- *si* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *converge alors* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge.*

Theorem 2 (Critère d'équivalence). *Soient* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *deux séries positives à partir d'un certain rang* $N \in \mathbf{N}$ *tels que* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = L$. *Alors:*

- *si* $L = 0$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *diverge alors* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *diverge,*
- *si* $L = 0$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *converge alors* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge.*
- *si* $L \in (0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge si et seulement si* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *converge et* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *diverge si et seulement si* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *diverge.*
- *si* $L = \infty$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *diverge alors* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *diverge,*
- *si* $L = 0$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge alors* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *converge.*

Theorem 3 (Critère d'intégrale). *Soient* $\{z_n\}$ *une suite et* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ *une fonction telle que* $f(n) = z_n$ *pour tout* n. *Alors:*

- $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ *converge si et seulement si* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge, et*
- $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ *diverge si et seulement si* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *diverge.*

Theorem 4 (Règle de d'Alembert). *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *une série positive à partir d'un certain rang* $N \in \mathbf{N}$ *telle que* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = L$.

- *si* $L < 1$ *alors* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge,*
- *si* $L > 1$ *alors* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *diverge.*

Exercices Décider si les séries suivantes sont convergentes ou pas:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n2^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot i}{n^2+1}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n^3}{1+2n^3}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{325^n}{n!}$