MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

(1) Calculer $z+w$, $z-w$, zw et z/w oú:
- ▶ $z = 4-4i$ et $w = -8-8i$,
- ▶ $z = 2+2\sqrt{3}i$ et $w = 2-2\sqrt{3}i$,
- ▶ $z = 3+4i$ et $w = 4-3i$,
- ▶ $z = 3-i$ et $w = 2+3i$.

(2) Calculer $(-1-\sqrt{3}i)^3$.

(3) Calculer $(1+i)^8$.

(4) Pour $z = x+yi \in \mathbf{C}$ on définit $\overline{z} = x-yi$. Trouver $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\arg(z)$ et $\overline{z}$ où:
- $z = 3$
- $z = 13i$
- $z = \sqrt{3}-i$
- $z = 4-4i$
- $z = -1-2i$

(5) Montrer que
- $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$
- $|z|^2 = z\,\overline{z}$

(6) Decider si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, bornés, compacts, connexes:
- $\{z \in \mathbf{C}\colon \mathrm{Im}(z) < 1\}$
- $\{z \in \mathbf{C}\colon \mathrm{Re}(z) \geq 2\}$
- $\{z \in \mathbf{C}\colon |z-2| \leq 2\}$
- $\{z \in \mathbf{C}\colon 1 < |z-i| < 4\}$
- $\{z \in \mathbf{C}\colon |z| = 2\}$
- $\{z \in \mathbf{C}\colon |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{4}\}$
- $\{z \in \mathbf{C}\colon z = \frac{1}{n+ni}\}$
- $\{z \in \mathbf{C}\colon z = \overline{z}\}$

(7) Montrer que $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ et $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$. Déduire que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

(8) Calculer $\sqrt{3i}$, i.e. trouver $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x+yi = \sqrt{3i}$.

(9) Calculer $\sqrt{4+4i}$, i.e. trouver $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x+yi = \sqrt{3i}$.

(10) Calculer $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$, i.e. trouver $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x+yi = \sqrt{3i}$.

(11) Décrire les ensembles suivants:
- $\{z \in \mathbf{C}\colon |z| = |z-1|\}$
- $\{z \in \mathbf{C}\colon \left|\frac{z+i}{z-i}\right| < 1\}$
- $\{z \in \mathbf{C}\colon |2z-4| <\leq\}$

(12) Montrer que l'équation $|z| = 2|z-1|$ est une équation d'un cercle et écrire l'équation en termes de x et y.

(13) Trouver toutes les racines de l'équation

$$z^4+z^2+1 = 0.$$

(14) Rappeler qu'on a définit deux applications $\varphi\colon \mathbf{C} \longrightarrow S^2\setminus\{N\}$ et $\psi\colon S^2\setminus\{N\} \longrightarrow \mathbf{C}$. Décrire:

- $\varphi(0)$
- $\varphi(1)$
- $\varphi(i)$
- $\varphi(-1)$
- $\varphi(-i)$
- $\varphi(\{z \in \mathbf{C} \colon z = x > 0\}$
- $\varphi(\{z \in \mathbf{C} \colon z = yi,\ y > 0\}$
- $\varphi(\{z \in \mathbf{C} \colon |z| = 1\})$
- $\varphi(B(0,1))$

(15) Montrer que si $\sum_{n=o}^{\infty} z_n$ converge, alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = 0$

(16) Montrer que la suite $\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n - z_{n-1})$ converge.

(17) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(18) Montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ converge, aussi. (On ne suppose pas que $a_n > 0$!!!)