

MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTIN

(1) Soient $f, g: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions différentiables. Montrer que

- $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- $(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$; où $g(z) \neq 0$.

(2) Décider si les polynômes suivants sont analytiques ou pas:

- $P(x, y) = x^3 - 3x^2y - x + \sqrt{-1}(3x^2y - y^3 - y)$
- $P(x, y) = x^2 + \sqrt{-1}y^2$
- $P(x, y) = 2xy + \sqrt{-1}(y^2 - x^2)$
- $P(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \sqrt{-1}(x^2 - xy + y^2)$

(3) Calculer:

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (-1)^n 2n}{3n}$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \arctan(n) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(4) Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Donner un exemple, c'est-à-dire trouver deux suites a_n et b_n tels que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) < \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(5) Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} 3^n}{10^n} z^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+2}} z^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3}{3^n} z^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(n^4 + 2)} z^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n n!} z^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n)^n z^n$