MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) Montrer que pour tout $z \in \mathbf{Z}$ on a $e^{\overline{z}} = \overline{e^{e}}$.

(2) On définit $\cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$.
   i. Dessiner les courbes $y = \sinh(x)$ et $y = \cosh(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$.
   ii. Calculer $\frac{d}{dz}(\sin(z))$, $\frac{d}{dz}(\cos(z))$, $\frac{d}{dz}(\sinh(z))$ et $\frac{d}{dz}(\cosh(z))$.
   iii. Vérifier les identités suivantes:
   - $\cos(z_1 + z_2) = \cosh(iz_1 + iz_2)$
   - $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2)$
   - $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2)$
   - $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$
   - $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$
   - $\cosh(z_1 - z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) - \sinh(z_1)\sinh(z_2)$
   - $\sinh(z_1 - z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) - \cosh(z_1)\sinh(z_2)$
   - $\cos(z_1 - z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_1)\sin(z_2)$
   - $\sin(z_1 - z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) - \cos(z_1)\sin(z_2)$

   iv. On définit $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ et $\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$.
   - Dessiner la courbe $y = \tanh(x)$ où $x \in \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$.
   - Vérifier $\tan(z) = -i\tanh(iz)$.
   - Calculer $\frac{d}{dz}(\tan(z))$ et $\frac{d}{dz}(\tanh(z))$.

(3) Calculer les intégrales suivantes et dessiner les arcs correspondants:
   - $\int_\alpha z^2 dz$; où $\alpha = e^{2i\pi mt}$, $t \in [0,1]$,
   - $\int_\alpha z dz$; où $\alpha = tz_o + (1-t)z_1$, $t \in [0,1]$,
   - $\int_\alpha e^z dz$; où $\alpha = t^2$, $t \in [0,1]$.

(4) Soit T le triangle avec les sommets $4i$, -2 et $1 - i$. Calculer
   - $\int_T z^2 + z dz$
   - $\int_T 1 - z dz$

(5) Calculer $\int_\alpha e^{iz} dz$; où α est le cercle unité
   - centré à l'origine
   - centré au point $z = -2$

(6) Calculer les intégrales $\int_{\alpha_i} \frac{dz}{z^2+1}$; $i = 1, 2$, si la courbe α_i reliant les points 2 et $2i$ est donnée comme suit:
   - α_1 est le segment rectiligne
   - α_2 est la ligne brisée allant de 2 à 1 et puis de -1 à $2i$.