MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Soient C_R le cercle de centre 0 et rayon R. Pour $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ avec $R > |w|$ fixé, montrer que
$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{w^2+z^2}\,dz = -\frac{2\pi}{w}\sinh(w).$$

(2)
- ► Dessiner la courbe $\alpha(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$; où $a, b \in \mathbf{R}_{>0}$.
- ► Calculer de deux manières différentes l'intégrale $\int_\alpha \frac{dz}{z}$.
- ► En déduire la valeur d'intégrale
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

(3) Soit α_R l'arc défini par le segment $[-R, R]$ et le demi-cercle situé dans la demi-plan supérieur de diamétre le segment $[-R, R]$ avec $R > 1$.
- ► Calculer $I_R = \displaystyle\int_{\alpha_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$.
- ► En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$.

(4) Calculer $\displaystyle\int_\alpha \frac{\cosh(z)}{2\ln(2) - z}\,dz$; où
- ► α est le cercle de centre 0 est rayon 1, et
- ► α est le cercle de centre 0 est rayon 2.

(5) Calculer
- ► $\displaystyle\int_\alpha \frac{\sin(2z)}{(6z-\pi)^3}\,dz$; où α est le cercle de centre 0 et rayon 3, c'est-à-dire $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| = 3$,
- ► $\displaystyle\int_\alpha \frac{e^{3z}}{(z-\ln(2))^4}\,dz$; où α est le cercle de centre 0 et rayon 325.
- ► $\displaystyle\int_\alpha \frac{\cosh(z)}{(2\ln(2)-z)^5}$; oú α est le cercle de centre 0 est rayon 2.

<u>Indication:</u> Utiliser: $\displaystyle\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz.$

(6) Soit $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière et soient $w, w' \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Montrer que si pour tout $z \in \mathbf{C}$
$$f(z+w) = f(z+w') = f(z)$$
et si w et w' sont $\mathbf{R}$ linéairement indépendants alors f est constante.

(7) Developper $f(z) = e^z$ en série entière en $a \in \mathbf{C}$ quelconque.

(8) Developper $f(z) = z^3 - 3z$ en série entière en $a = i$.

(9) Developper $f(z) = z^4 - z^2 + 1$ en série entière en $a = \ln(2)$.

(10) On dit qu'une fonction $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ est impaire si pour tout $z \in \mathbf{C}$ $f(-z) = -f(z)$ et paire si $f(-z) = f(z)$. Si on écrit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors
- ► $a_{2k} = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ si f est impaire, et
- ► $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ si f est paire.

(11) Supposons que f est une fonction entière et $|f(z)| \leq A + B|z|^{3/2}$ pour certains $A, B \in \mathbf{R}_{>0}$. Montrez que f est une fonction polynomiale de degré au plus 1.

(12) Supposons que $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ est entière et $|f'(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Montrer que $f(z) = a + bz^2$ pour certains $a, b \in \mathbf{C}$.

(13) Developper $f(z) = \frac{1}{z}$ en $z_o = 1 + i$

(14) Supposons que f est analytique dan $B(0, 1)$. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{1}{n+1}$.

(15) Soit C le cercle $|z - i| = 2$. Calculer:
- $\displaystyle\int_C \frac{2}{z-1}\,dz$,
- $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z(z-2)^2}\,dz$

(16) Calculer les intégrales suivantes:
- $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{(1-z)^3}\,dz$ où C_1 est le cercle de centre 0 et rayon $\frac{1}{2}$.
- $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{(1-z)^3}\,dz$ où C_2 est le cercle de centre 1 et rayon $\frac{1}{2}$.
- $\displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{(1-z)^3}\,dz$ où C_3 est le cercle de centre -1 et rayon $\frac{1}{2}$.