MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

1. Démontrer que $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$.

2. Soit f une fonction analytique telle que $f(z) = \tan(z)$ pour tout $z \in \{w \in \mathbf{C} \colon \mathrm{Im}(w) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}(w) \in [0,1]\}$. Montrer que l'équation $f(z) = i$ n'a pas de solution.

3. Soit $f \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière. On écrit $f = u + iv$. En utilisant le **principe du maximum** démontrer que si u est majorée alors f est constante.

4. Soit U un ouvert contenant le disque fermé $\overline{B(0,1)} = B(0,1) \cup \partial B(0,1)$ et soit $f \colon U \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique telle que $f(0) = 1$ et $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f admet au moins un zéro dans $B(0,1)$, c'est-à-dire l'équation $f(z) = 0$ admet au moins une solution.

5. Soit $f \colon \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par $f(z) = z^2 - z$. Trouver maximum et minimum de $|f|$.

6. Déduire le théorème fondamental de l'algébre en utilisant le principe du minimum.

7. Soit $\mathbb{D} := \{z \in \mathbf{C} \colon |z| < 1\}$. On dit que $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un automorphisme de $\mathbb{D}$ si f est analytique, bijective et réciproque est analytique. Le but de l'exercice est de trouver tous les automorphismes analytiques de $\mathbb{D}$.
   - ▶ Déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{D}$ qui fixent 0, c'est-à-dire déterminer tous automorphismes $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ tel que $f(0) = 0$.
   - ▶ Soient $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Montrer que la fonction $f_{a,b}(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ satisfait
     - i. si $|z| < 1$ alors $|f_{a,b}(z)| < 1$, c'est-à-dire f est une fonction de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$,
     - ii. f est bijective, et
     - iii. f est analytique.

     En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{D}$.
   - ▶ Étant donne un $w \in \mathbb{D}$ quelconque déterminer a, b avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$ tel que $f_{a,b}(z) = 0$.
   - ▶ Déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{D}$.