MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 7

A. ZEYTİN

1. Montrer que la série de Laurent d'une fonction est unique.
2. Trouver la série de Laurent et la couronne, dans la quelle la série converge, des fonctions suivantes:
   - $\dfrac{1}{z^4+z^2}$, $z=0$,
   - $\dfrac{1}{z^4+z^2}$, $z=i$,
   - $\dfrac{e^{1/z^2}}{z-1}$, $z=0$,
   - $\dfrac{1}{z^2-4}$, $z=2$.
3. Soit $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$.
   - Quel est le développement en série de Laurent de f dans la couronne $1<|z|<2$.
   - Trouver le développement en série de Laurent de f pour $|z|>2$.
4. Déterminer le domaine d'analyticité, c'est-à-dire le plus *grand* sous-ensemble de $\mathbf{C}$ dans lequel f est analytique, des fonctions suivantes, et préciser le type de singularité:
   - $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2+z^4}$
   - $f(z)=\dfrac{1}{z+z^3}$
   - $f(z)=\dfrac{z}{\sin(z)}$
   - $f(z)=\dfrac{\cos(z-1)}{\sin(z)-z}$
   - $f(z)=z^2\tan(\dfrac{1}{z})$
   - $f(z)=\cos(\dfrac{1}{1-z})$
   - $f(z)=e^{\tan(\frac{1}{z})}$
   - $f(z)=\dfrac{z}{\sin(\frac{1}{z})}$
5. Déterminer le type de la singularité et le résidu de
   - $f(z)=\dfrac{1+\cos(z)}{(z-\pi)^2}$ en $z=\pi$,
   - $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}$ en $z=0$,
   - $f(z)=\dfrac{z+2}{(z^2-2z+1)^2}$ en $z=1$,
   - $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2-5iz-4}$ en $z=i$ et $4i$,
   - $f(z)=\dfrac{\cosh(4z)}{z^3}$ en $z=0$,
   - $f(z)=\dfrac{e^{i\pi z}}{(z+2)^3}$ en $z=-2$,
   - $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$ en $z=0$.