MATH 371
ÉNONCÉS DES EXERCICES 8

A. ZEYTİN

1. Déterminer le type de la singularité et le résidu des fonctions suivantes à $z_o = 0$:
   - $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z)}$
   - $f(z) = \dfrac{z^6 + 4z^3 + 3}{z^2 + z}$
   - $f(z) = \cot(z)$
   - $f(z) = \dfrac{\csc(z)}{z}$
   - $f(z) = \dfrac{1 - z}{e^{z^3} - 1}$
   - $f(z) = z \sin(\dfrac{1}{z})$
2. Soit $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique et soit $g(z) := \pi \cdot f(z) \cdot \cot(\pi z)$. Montrer que $\mathrm{Res}(g, n) = f(n)$ pout tout $n \in \mathbf{Z}$.
3. Soit $z_o \in \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C} \colon \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}(z) < 0\}$ fixé. Déterminer la série de Taylor de $f(z) = \log(z)$ en z_o et son rayon de convergence.
4. Trouver $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $e^a = e^b$, mais $\log(a) \neq \log(b)$. Qu'est-ce qu'on deduit pour $\log(z)$?
5. Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que
   - $\log(e^z) = z$ si $\mathrm{Im}(()z) \in (-\pi, \pi]$.
   - $e^{\log(z)} = z$ si $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.
6. Soient $z, w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Montrer que $\log(zw) = \begin{cases} \log z + \log(w) & \text{si } \arg(z) + \arg(w) \in (-\pi, \pi] \\ \log z + \log(w) - 2\pi i & \text{si } \arg(z) + \arg(w) \in (\pi, 2\pi] \\ \log z + \log(w) + 2\pi i & \text{si } \arg(z) + \arg(w) \in (-2\pi, -\pi] \end{cases}$
7. Définir une fonction analytique, f, sur $\mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C} \colon \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}(z) < 0\}$ tel que $f(x) = x^x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$.
   - Calculer $f(i)$
   - Calculer $f(-i)$
   - Calculer $f(2i)$
   - Calculer $f(-2i)$
   - Démontrer que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.
8. Calculer les intégrales suivantes:
   - $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^4 + 4}\, dz$; où γ est le cercle de centre $-1 + i$ et rayon 1 orienté de dens anti-horaire.
   - $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(z^2 - 2z + 2)}\, dz$; où γ est le cercle de centre i et rayon 2 orienté de dens anti-horaire.
   - $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{4z^2 - \pi^2}\, dz$; où γ est le cercle de centre 0 et rayon 2 orienté de dens anti-horaire.
   - $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^2 + 1}\, dz$; où γ est le cercle de centre 0 et rayon 2 orienté de dens anti-horaire.
   - $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(\sin(z))^2}\, dz$; où γ est le cercle de centre 0 et rayon 1 orienté de dens anti-horaire.

- $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4)}\,dz$; où γ est le cercle de centre 1 et rayon 1 orienté de dens anti-horaire.
- $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4)}\,dz$; où γ est le cercle de centre 0 et rayon 4 orienté de dens horaire.
- $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{3z^4+10z^2+3}\,dz$; où γ est le cercle de centre $i\sqrt{3}$ et rayon 1 orienté de dens anti-horaire.

9. Montrer que pour $k > 1$, $k \in \mathbf{N}$ fixé l'équation $z^n = e^z - k$ possède exactement n solutions dans $\mathbb{D}$.

10. Soit $f\colon \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique. Montrer que l'équation $f(z) = z$ a exactement 1 solution dans $z \in \mathbb{D}$.

11. Combien des résolutions de l'équation $2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9 = 0$ sont dans $\mathbb{D}$?

12. Utiliser théorème de Rouché pour démontrer que si $p(x)$ est un pôlynome de degré n alors l'équation $p(z) = 0$ a exactement n solutions.