Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2014-2015 - 2. Semestre – Math 325 - Théorie Des Fonctions Complexes
Examen Final, 27 mai 2015 – Ayberk Zeytin
150 mins. **Nom & Prénom:** ________________________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	10	40	24	6	16	96
Score:						

Question 1 (10 points)
Déterminer le nombre de solutions d'équation $e^z - 4z^n + 1 = 0$ dans $\mathbb{D}$, $n \in \mathbf{N}$.

Question 2 (40 points)

Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbf{C} \colon \operatorname{im}(z) > 0\}$.

(a) (8 points) Montrer que $w = \dfrac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}$ pour tout $z \in \mathbb{H}$.

(b) (8 points) Montrer que si $z \in \partial\mathbb{H}$ alors $|w| = \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

(c) (8 points) Montrer que la fonction:

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto w = \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

est analytique et bijective.

(d) (8 points) Soit $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{H}$ une fonction entière. Montrer que f est constante.
Indication: Utiliser (c).

(e) (8 points) Soit $g\colon \mathbb{D}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{H}$ une fonction analytique. Montrer que la singularité de g en 0 est apparente. Indication: Utiliser (c).

Question 3 (24 points)

Soit $f(z) = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{(1-z^2)}$.

(a) (8 points) Donner le développement en série entière de f dans le disque $|z| < 1$.

(b) (8 points) Donner le développement en série de Laurent de f dans la couronne $1 < |z| < 2$.

(c) (8 points) Quel est le développement en série de Laurent de f dans la couronne $0 < |z-1| < 1$.

Question 4 (6 points)

Trouver et expliquer la faute dans la série d'égalités suivantes:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{e^{2\pi i}} = e^{\pi i} = -1.$$

Question 5 (16 points)

Soit $f(z) = \tan(\pi z)$.

(a) (8 points) Déterminer toutes les singularités de $f(z)$.

(b) (8 points) Calculer $\int_{\gamma_N} \tan(\pi z)dz$; où γ_N est le cercle de centre 0 et rayon N orientée au sens anti-horaire.