Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2014 - Deuxième Semestre – Math 325 - Théorie Des Fonctions Complexes
Examen Partiel 1, 20 Mars 2014 – Ayberk Zeytin
100 mins. **Nom & Prénom:** ____________________

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	8	10	16	16	16	16	82
Score:							

Question 1 (8 points)
Supposons que f est une fonction définie sur $\Omega \subset \mathbf{C}$, ouvert et connexe. Montrez que f est analytique sur Ω si et seulement si f^n est analytique sur Ω.

Question 2 (10 points)

Décidez si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés. Déterminez la frontière, ∂S.

(a) (5 points) $S = \left\{ \dfrac{n+i}{n-i} : n \in \mathbf{Z} \right\}$

(b) (5 points) $S = \{z \in \mathbf{C} \colon |\arg(z-1)| \leq \pi/4\}$

Question 3 (16 points)

Par $\varphi\colon \mathbf{C} \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}$ on note la projection stéréographique.

(a) (8 points) Pour $k \in \mathbf{N}$ quelconque déterminez $\varphi(C_k)$ où $C_k = \{z \in \mathbf{C} \colon |z| = k\}$

(b) (8 points) Pour $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ déterminez $\varphi(\mathrm{D}_k)$ où $\mathrm{D}_k = \{z \in \mathbf{C} \colon \arg(z) = \frac{\pi}{\ell}\}$

Question 4 (16 points)

Déterminez le rayon de convergence, R, des séries suivantes:

(a) (8 points) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{3n+1} n!}{(2n)^n}$

(b) (8 points) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$. Étudiez la série pour $|z| = R$, aussi.

Question 5 (16 points)

Soit $f = u + iv$ une fonction de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$

(a) (3 points) Rappelez les équations de Cauchy Riemann.

(b) (8 points) Démontrez que si f est analytique alors

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \text{ et } v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

(c) (5 points) Trouvez $C \in \mathbf{R}$ tel que la fonction $f(z) = r^C e^{iC\theta}$ est analytique.

Question 6 (16 points)

Pour $z_o \in \mathbf{C}$ quelconque:

(a) (4 points) trouvez l'application $\alpha_{z_o,r} \colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{C}$ qui détermine le cercle de rayon r et de centre z_o.

(b) (6 points) Calculez $\displaystyle\int_{\alpha_{z_o,r}} \frac{1}{z - z_o} dz$.

(c) (6 points) Calculez $\displaystyle\int_{\alpha_{z_o,r}} \frac{1}{(z - z_o)^k} dz$ pour $k > 1$, $k \in \mathbf{N}$.