**Université Galatasaray, Département de Mathématiques**
**2014-2015 - 2. Semestre – Math 325 - Théorie Des Fonctions Complexes**
**Examen Partiel 2, 15 avril 2015 – Ayberk Zeytin**
**90 mins.** **Nom & Prénom:** ____________________

| Question: | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Points: | 33 | 16 | 12 | 12 | 73 |
| Score: | | | | | |

**Question 1** (33 points)

(a) (8 points) Développer $f(z) = e^{2z+3}$ en $z = 2$.

(b) (8 points) Développer $f(z) = \frac{1}{z}$ en $z = 2$.

(c) (7 points) Soit $f(z) = \frac{e^{2z+3}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$. Calculer $a_0$, $a_1$ et $a_2$. Indication: Utiliser (a) et (b).

(d) (5 points) Calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ Indication: Utiliser (a).

(e) (5 points) Calculer $\int_{\alpha} \frac{e^{2z+3}}{(z-2)} dz$; où $\alpha$ est la courbe $|z-5/2| = 1$ orientée de sens anti-horaire.

**Question 2** (16 points)

Soit $\alpha_R$ l'arc défini par le segment $[-R, R]$ (on l'appelle $\ell_R$) et le demi-cercle situé dans la demi-plan supérieur de diamétre le segment $[-R, R]$ (on l'appelle $C_R$) avec $R > 5$ orienté de sens anti-horaire.

(a) (8 points) Calculer $\displaystyle\int_{\alpha_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz$.

(b) (8 points) Étant donné $\displaystyle\lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz = 0$, en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + 2x + 2} dx = -\frac{\pi}{e} \sin(1)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{\pi}{e} \cos(1)$.

**Question 3** (12 points)

Soit $f$ une fonction analytique dans un ouvert qui contient proprement $B(z_o, r) \cup \{z \in \mathbf{C}\colon |z - z_o| = r\}$; où $r > 0$. Supposons que $M_r = \sup\{|f(z)|\colon |z - z_o| = r\} < \infty$. Montrer que

$$|f^{(k)}(a)| \leq \frac{k! M_r}{r^k}$$

**Question 4** (12 points)

Supposons que $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique et $|f(z)| < me^{\alpha x}$ pour tout $z = x + iy \in \mathbf{C}$; où $m, \alpha \in \mathbf{R}_{>0}$. Montrer que $f(z) = Ae^{\alpha z}$ pour certain $A \in \mathbf{C}$.