Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2014-2015 - 2. Semestre – Math 325 - Théorie Des Fonctions Complexes
Examen Partiel 3, 13 mai 2015 – Ayberk Zeytin
90 mins. **Nom & Prénom:** ____________________

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	10	17	24	16	67
Score:					

Question 1 (10 points)
Soit U un ouvert dans $\mathbf{C}$ et $f\colon U \longrightarrow U$ une fonction analytique. Montrer que si $(f(z))^2 = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in U$ alors $f(z) = A$ constante pour certain $A \in \mathbf{C}$. (Indication: Qu'est-ce que vous pouvez dire concernant $h(z) = (f(z))^3$.)

Question 2 (17 points)

Soit $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \overline{\mathbb{D}}$ une fonction analytique non-constante ayant un zéro d'ordre m en $z = 0$.

(a) (6 points) Montrer que la singularité de la fonction $g(z) := f(z)\dfrac{1}{z^m}$ en $z = 0$ est apparente.

(b) (8 points) Montrer que pour $z \in \partial\mathbb{D}$ on a $|g(z)| \leq 1$.

(c) (3 points) En déduire que $|f(z)| \leq |z|^m$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Question 3 (24 points)

Soit $f\colon \mathbf{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction ayant

- un pôle simple (un pôle d'ordre 1) en $z = 0$,
- un pôle d'ordre 3 en $z = -1$, et
- un zéro d'ordre 4 en $z = 1$.

Supposons que $\mathrm{Res}(f, 0) = A$. Déterminer les résidus de $g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$ en

(a) (6 points) $z_0 = 0$,

(b) (6 points) $z_0 = -1$,

(c) (6 points) $z_o = 1$,

(d) (3 points) Faire une conjecture concernant $\mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, z_o)$.

(e) (3 points) Donner un exemple d'une telle fonction.

Question 4 (16 points)

Déterminer les types des singularités des fonctions suivantes en z_o :

(a) (8 points) $f(z) = \dfrac{(\cos(z) - 1)^2}{z^7}$ en $z_o = 0$.

(b) (8 points) $f(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\frac{t}{z})}{tz^3} dt$ en $z = 0$.