MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

On suppose que E est un espace vectoriel sur un corps k. Par F, G on note sous-espaces vectoriels de E.

(1) Pour k un corps déterminer si les parties suivantes de k sont sous-espace vectoriels de k^3 ou pas:
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 10\}$
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | x_1 x_2 = 0\}$
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | x_1 x_2 = 10\}$
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | x_1 = 2x_2\}$

(2) Soit $\{E_i,\ i \in I\}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E/k. Montrer que l'intersection $\cap_{i\in I} E_i$ est aussi un sous-espace vectoriel. Est-ce qu'il est vrai que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E?

(3) Soient F_1, F_2, G sous-espaces vectoriels de E/k. Vrai ou faux:
- ▶ Si $F_1 + G = F_2 + G$ alors $F_1 = F_2$,
- ▶ Si $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$ alors $F_1 = F_2$.

(4) Déterminer une base pour $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 | x_1 = 2x_2 \text{ et } x_3 = -x_4\}$ dans $\mathbf{R}^4$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Quelle est son dimension (c'est-à-dire la dimension de F) sur $\mathbf{Q}$?

(5) Déterminer (c'est-à-dire déssiner) $sp(M)$ dans $\mathbf{R}^3$ où $M =$
- ▶ $\{(1, 1, 0)\}$
- ▶ $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$
- ▶ $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$

(6) On considère $E = \mathbf{R}^3$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

  i. Déterminer une base pour $\mathcal{L}(E, k)$ et déterminer sa dimension.

  ii. Pour un élément $T \in \mathcal{L}(E, k)$ montrer que $F_T := \{x \in E \colon T(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension?

(7) Soit M une partie non-vide de E. On définit:

$$M^\perp := \{T \in \mathcal{L}(E, k) \colon T(x) = 0 \text{ pour tout } x \in M\}.$$

  i. Montrer que $M^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, k)$.

  ii. Montrer que $M^\perp = (sp(M)^\perp)$.

  iii. Pour $E = \mathbf{R}^3$, calculer $M^\perp$ où $M =$
  - ▶ $\{(1, 1, 0)\}$
  - ▶ $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$
  - ▶ $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$

(8) F_1 et F_2 étant deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E/k, on définit l'application $f \colon E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.
- ▶ Montrer que f est linéaire.
- ▶ Déterminer le noyau et l'image de f.
- ▶ Appliquer le théorème du rang (c'est-à-dire $\dim_k(im(f)) + \dim_k(\ker(f)) = \dim_k(E)$) à f.

(9) Trouver une application linéaire de $\mathbf{R}^4$ vers $\mathbf{R}^2$ telle que $\ker(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 | x_1 = x_3 \text{ et } x_2 = -2x_4\}$. Montrer qu'une telle application est surjective.

(10) Soit E/k un espace vectoriel de dimension finie et soient $T, S \in \mathcal{L}(E, E)$.
- ▶ Montrer que $TS = I$ si et seulement si $ST = I$.
- ▶ Montrer que $T = \lambda I$ si et seulement si il existe une $S \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $TS = ST$.