MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

On suppose que X est un ensemble non-vide, τ une topologie sur X.

(1) Montrer que si B est un ouvert de l'espace topologique X et $A \cap B = \emptyset$ alors $\overline{A} \cap B = \emptyset$ mais que $\overline{A} \cap \overline{B}$ n'est pas nécessairement vide.

(2) Décider si vrai ou faux:
$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

(3) Déterminer la frontière et l'intérieur des ensembles suivantes:
- $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^2$,
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 < x < 12 \text{ et } y = 0\}$,
- $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon 0 < x < 1,\ 0 < z < 1 \text{ et } y = 1\}$,
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$,

(4) Soit X un espace topologie et A une partie de X. Montrer que:
- $\partial(A) = \partial(A^c)$
- $A = \partial A$ si et seulement si A est fermé et d'intérieur vide.
- $\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$ et que l'inclusion peut être stricte.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(5) Soit $X = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbf{R} \colon a, b \in \mathbf{Z}\}$.
- Démontrer que X est fermé sous l'addition et la multiplication.
- Soit $u = \sqrt{2} - 1$. Démontrer que pour tous $a < b$ il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que $0 < u^n < b - a$.
- Déduire qu'il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $a < mu^n < b$.
- En dédure que $\overline{X} = \mathbf{R}$.

(6) Soit $X = \{0, 1\}$ muni de la famille des ouverts $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. Décider si l'espace topologique (X, τ) est Hausdorff.

(7) Soient $(X, \tau_X$ et Y, τ_Y deux espaces topologiques, $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans X et $\{\beta_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans Y. Montrer que $\lim \alpha_n = \alpha$ et $\lim \beta_n = \beta$ si et seulement si $\lim \zeta_n = \zeta$; où ζ_n est la suite définie par (α_n, β_n) dans $X \times Y$.

(8) Soit X un espace topologique et f une application quelconque de X dans un ensemble Y. On dit qu'une partie A de Y est ouverte si $f^{-1}(A)$ est un ouvert de X. Vérifier qu'on a définie une topologie sur Y.

(9) Soient K, K' deux parties compactes d'un espace topologique X. Démontrer que
- $K \cap K'$, et
- $K \cup K'$

sont compactes aussi.

(10) Sur $X = \mathbf{R}^2$ on définit la distance entre (a_1, b_1) et (a_2, b_2) comme:
$$\max(|(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)|, |a_2 - a_1 - 2(b_2 - b_1)|).$$
- Montrer que (X, d) est un espace métrique.
- Calculer la distance entre quelques points de X.
- Déssiner sa boule unite ouverte et fermée.

(11) On note $X = \ell^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique
$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n - y_n|.$$

- ▶ Pour $x_n = (-1)^n$ et $y_n = \sin(\frac{1}{n})$ calculer $d(x_n, y_n)$.
- ▶ Pour $x_n = e^{1/n}$ et $y_n = \cos(1/n^2)$ calculer $d(x_n, y_n)$.
- ▶ Montrer que Y est fermé dans X.
- ▶ Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X.

`Indication:` Une suite de l^∞ est notée $(x^p)_{p\in\mathbf{N}}$, pour chaque $p \geq 0$, x^p est elle même une suite $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \ldots)$.

(12) Soit $X = C([0,1], \mathbf{R})$ muni de la métrique $d(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$.

- ▶ Pour $f(t) = \sin(t)$ et $g(t) = \cos(t)$ calculer $d(f,g)$.
- ▶ Pour $f(t) = t^2$ et $g(t) = \frac{1}{t}$ calculer $d(f,g)$.
- ▶ Pour $f(t) = t^2$ et $g(t) = t^2 e^t$ calculer $d(f,g)$.

Repeter le même exercice en utilisant la métrique $d(f,g) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$

(13) Trouver un $p > 1$, $p \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ tels que les suites suivantes appartiennent à ℓ^p:

- ▶ $\left\{\dfrac{1}{j^3}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$
- ▶ $\left\{\dfrac{j}{e^j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$
- ▶ $\left\{\dfrac{\sin(1/j)}{j^{10}}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$
- ▶ $\left\{(-1)^j\right\}_{j\in\mathbf{N}}$
- ▶ $\left\{\dfrac{\sin(j)}{j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$

(14) Donner deux éléments, $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ et $\beta = \{\beta_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ de ℓ^2 et calculer $d(\alpha, \beta)$.