MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Décider si les suites suivantes sont de Cauchy ou pas:
- $\alpha_n = \frac{\sin(n)}{2^n}$,
- $\alpha_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,
- $\alpha_n = \frac{\cos(1)}{1!} + \frac{\cos(2)}{2!} + \ldots + \frac{\cos(n)}{n!}$,
- $\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

(2) Soit $\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique (X, d). Montrer que si α_n admet une sous-suite α_{k_n} qui converge vers $\alpha_o \in X$ alors α_n converge vers α_o.

(3) Soit $\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\}$ une suite dans un espace métrique (X, d). Montrer que si α_n est Cauchy alors α_n est bornée. L'inverse est-il vrai?

(4) Soient $\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\}$ et $\{\beta_n : n \in \mathbf{N}\}$ deux suites de Cauchy dans un espace métrique (X, d). Montrer que la suite $\gamma_n := d(\alpha_n, \beta_n)$ est une suite convergente dans l'espace $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.

(5) Soit $0 < a < 1$ un réel et $\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\}$ une suite dans un espace métrique (X, d) qui vérifie:

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N},\ |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < a^n.$$

Montrer que $\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une suite de Cauchy.

(6) Décider si les métriques suivantes sur $\mathbf{R}$ sont complets ou pas:
- $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$
- $d(x, y) = |x^3 - y^3|$
- $d(x, y) = |e^x - e^y|$
- $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$

(7) Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in X = \mathbf{R}^n$. On définit:

$$d_{sup}(\alpha, \beta) = \max_{1 \leq j \leq n} \{|\alpha_j - \beta_j|\}.$$

Montrer que $(\mathbf{R}^n, d_{sup})$ est un espace métrique complet.