MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) On considère $E = \mathbf{R}^2$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Montrer que $||x|| = ||(x_1, x_2)|| := \sup_{t\in[0,1]}\{|x_1 + tx_2|\}$ donne une norme sur $\mathbf{R}^2$. Dessiner sa boule unite $B(o, 1) := \{x \in \mathbf{R}^2 \colon ||x|| < 1\}$.

(2) Dans $\mathbf{R}$ on pose $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et $d(x, y) = |x| + |y|$ sinon.
- ▶ Montrer que d est une métrique sur $\mathbf{R}$.
- ▶ Déterminer sa boule unite ouverte, $B(o, 1)$, et fermée $B[o, 1]$.
- ▶ Montrer que toute boule ouverte est un fermé. Comparer $B[o, 1]$ et $\overline{B(o, 1)}$.
- ▶ La métrique donnée par d peut-elle être issue d'une norme?

(3) Soient $E/\mathbf{R}$ un espace vectoriel et $|| \cdot ||_1$ et $|| \cdot ||_2$ deux normes sur E. Montrer que
- ▶ $B_1[o, 1] = \{x \in E\colon ||x||_1 \leq 1\} = B_2[o, 1] = \{x \in E\colon ||x||_2 \leq 1\} \Rightarrow ||v||_1 = ||v||_2$ pour tout $v \in E$.
- ▶ $B_1(o, 1) = \{x \in E\colon ||x||_1 < 1\} = B_2(o, 1) = \{x \in E\colon ||x||_2 < 1\} \Rightarrow ||v||_1 = ||v||_2$ pour tout $v \in E$.

(4) Soient $(E, || \cdot ||)$ un espace normé sur $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$).
- ▶ Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a
$$||x|| + ||y|| \leq 2 \max\{||x + y||, ||x - y||\}$$
- ▶ Montrer que on a l'égalité si $x = o$ ou $y = o$. Est-ce qu'on peut avoir l'égalité avec $x \neq o$ et $y \neq o$? (Considerer dans $|| \cdot ||_{euc}$.)
- ▶ Montrer que pour tous $x, y \in E$,
$$||x|| + ||y|| \leq \sqrt{2} \max\{||x + y||, ||x - y||\}$$
- ▶ Est-ce qu'on peut améliorer la constante $\sqrt{2}$?

(5) Sur $C([0, 1], \mathbf{R})$ on définit $||f||^1 := \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\, dt}$. Montrer que $|| \cdot ||$ est une norme sur $C([0, 1], \mathbf{R})$.

(6) Sur $C([0, 1], \mathbf{R})$ on définit $||f||^p := \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p\, dt}$, où $p \in \mathbf{R}_{\geq 1}$. Montrer que $|| \cdot ||^p$ est une norme sur $C([0, 1], \mathbf{R})$.

(7) Soit $(E, || \cdot ||)$ un espace de Banach et soient A, B deux sous-espaces tels que $A \cap B = \{0\}$, A étant fermé et B de dimension finie.
- ▶ Pour $b \in B$ on définit $||b||_B := \inf_{a\in A} ||b + a||$. Vérifier que $|| \cdot ||_B$ est une norme sur B.
- ▶ En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que $||a + b|| \geq C||b||$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$.
- ▶ Montrer que $A \oplus B$ est un sous-espace fermé de E.

(8) Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) et $f\colon E \longrightarrow F$ une application linéaire.
- ▶ Écrire la definition de continuité de f en $x \in E$.
- ▶ Montrer que si f est continue en 0, alors f est continue pour tous $x \in E$.

(9) Soit $E = C([0, 1], \mathbf{R})$.
- ▶ Montrer que l'application $L\colon E \longrightarrow \mathbf{R}$ définié par $L(f) := f(1)$ est une application linéaire.
- ▶ Montrer que L n'est pas continue. `Indication:` Considerer la suite $f_n = \sqrt{n}x^n$.

(10) Soit $E = C([-1, 1], \mathbf{R})$. On considère E sous la métrique $|| \cdot ||_1$ (voir Exercice 5). On définit:
$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & -1 \leq t \leq \frac{-1}{n} \\ nt & \frac{-1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- Vérifier que $f_n \in E$ pour tous $n \in \mathbf{N}$
- Montrer que f_n est une suite de Cauchy. (`Indication:` Montrer que $\|f_n - f_m\| < \max\{\frac{2}{n}, \frac{2}{p}\}$ à partir de certain rang.)
- Supposons qu'il existe une $f \in E$ telle que $\lim f_n = f$. Alors, pour tout n il existe $\alpha \in (0,1)$ tel que

$$\left(\int_{-1}^{-\alpha} (f_n(t) - f(t))^2 \, dt\right)^{1/2} = 0 \text{ et } \left(\int_{1}^{\alpha} (f_n(t) - f(t))^2 \, dt\right)^{1/2} = 0$$

- Montrer qu'on a:

$$\int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1| \, dt = 0 \text{ et } \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - 1| \, dt = 0$$

  En déduire que $f(t) = \begin{cases} -1 & -1 \leq t < 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \end{cases}$
- Conclure que E muni de cette norme n'est pas complet.