MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces métriques, X et Y.
- Si M est une partie compacte de X, montrer que $f(X)$ est une partie compacte de Y.
- En déduire que si $T : M \longrightarrow \mathbf{R}$ est une application continue d'une partie compacte $M \subset X$ vers $\mathbf{R}$ alors, T admet un maximum et un minimum.

(2) Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Montrer que:
- ▶ $R(T)$ est un sous-espace vectoriel de F,
- ▶ $D(T)$ est un sous-espace vectoriel de E,
- ▶ $N(T)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(3) Décider si les opérateurs suivants de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ sont linéaires:
- ▶ $T_1(x_1, x_2) = (x_1, 0)$
- ▶ $T_2(x_1, x_2) = (0, x_2)$
- ▶ $T_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$
- ▶ $T_4(x_1, x_2) = (\gamma x_1, \gamma x_2)$; où $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Vérifier que $T_i \circ T_j$ est aussi un opérateur linéaire de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$. Déterminer tout les indices i, j tels que $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$. Écrire $T_1, \ldots, T_4$ comme une matrice sous la base:
- ▶ $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$
- ▶ $\mathcal{B}_2 = \{(1/2, 0), (0, 3)\}$
- ▶ $\mathcal{B}_3 = \{(1, 1), (0, 1)\}$
- ▶ $\mathcal{B}_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$

(4) Soient T, S deux opérateurs linéaires de X vers X. Montrer que $T \circ S$ est aussi un opérateur linéaire de X vers X, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}(X, X)$.

(5) Soit $T\colon D(T) \longrightarrow R(T)$ un opérateur linéaire, où $D(T) \subseteq X$ et $R(T) \subseteq Y$. Supposons que T est injective, c'est-à-dire $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 x_2$. On définit $S\colon R(T) \longrightarrow D(T)$ par $Sy = x$ où $Tx = y$. Montrer que
- ▶ $STx = x$ et $TSy = y$, pout tout $x \in D(T)$ et $y \in R(T)$, (et donc S est appellé l'inverse de T, noté par T^{-1}.)
- ▶ S existe si et seulement si $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$,
- ▶ s'il existe, S est un opérateur linéaire,
- ▶ si $\dim(D(T)) = n < \infty$ et si S existe, alors $\dim(R(T)) = n$.

Déterminer l'inverse des opérateurs dans Exercice 3, s'il existe.

(6) Soient $T\colon X \longrightarrow Y$ un opératuer linéaire et $\dim(X) = n = \dim(Y) < \infty$. Montrer que T^{-1} existe si et seulement si $R(T) = Y$.

(7) Soit $X = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) := \{f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} | f \text{ est infiniment dérivable }\}$. On considére $d\colon X \longrightarrow X$ par $df(t) := f'(t)$.
- ▶ Montrer que d est un opérateur linéaire de X vers X.
- ▶ Décider si d est injective. Si oui, déterminer d^{-1}.

(8) Soit $T\colon X \longrightarrow Y$ un opérateur borné entre deux espaces normés X et Y. Montrer que T est borné si et seulement si l'image de toutes parties bornées de X est bornée dans Y. Est-ce que vous pouvez déduire que si T est injectif et borné alors T^{-1} est aussi un opérateur borné.