MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

(1) Soit $X = C([0,1], \mathbf{R})$ muni de la norme:

$$\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$$

Sur X, on définit

$$\begin{aligned} T\colon X &\longrightarrow X \\ x &\mapsto \int_0^t x(\tau)d\tau \end{aligned}$$

- ▶ Calculer $T\sin(t)$, $T\cos(t)$, Te^t, $T(t^2+t+1)$.
- ▶ Montrer que T est un opérateur linéaire.
- ▶ Décider si T est injectif.
- ▶ Décider si T est surjectif.
- ▶ Décider si T est borné. Si oui, calculer $\|T\|$.

(2) Soit $X = \ell^p$, où $1 \leq p < \infty$. On fixe une suite $a = \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ avec $\lim a_n = 0$. On définit:

$$\begin{aligned} T\colon \ell^p &\longrightarrow \ell^p \\ x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} = (x_{1,x_2,\ldots}) &\mapsto Tx = \{a_j x_j\}_{j\in\mathbf{N}} = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots). \end{aligned}$$

On pose $e_1 = (1,0,0,\ldots)$, $e_2 = (0,1,0,0,\ldots)$, $e_3 = (0,0,1,0,0,\ldots)$, etc. Notons que $e_n \in \ell^p$ pour tous $p \in \mathbf{N}$

- ▶ Montrer que T est bien définié, c'est-à-dire $Tx \in \ell^p$.
- ▶ Déterminer Te_i pour tout $i \in \mathbf{N}$.
- ▶ Montrer que T est un opérateur linéaire.
- ▶ Décider si T est injectif.
- ▶ Décider si T est surjectif.
- ▶ Décider si T est borné. Si oui, calculer $\|T\|$.

(3) Soit $X = \ell^1$ muni de la norme $\|x\| = \|\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\| = \|(x_1, x_2, \ldots)\| := \sum_{i=1}^n |x_i|$. On définit

$$\begin{aligned} T\colon X &\longrightarrow X \\ x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) &\mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots) \end{aligned}$$

- ▶ Calculer Tx; où $x = x_n = \frac{1}{n^2}$, $x = x_n = \frac{1}{n^2+1}$, $x = x_n = \frac{1}{e^n}$.
- ▶ Montrer que T est un opérateur linéaire.
- ▶ Décider si T est injectif.
- ▶ Décider si T est surjectif.
- ▶ Décider si T est borné. Si oui, calculer $\|T\|$.

(4) Soit

$$\begin{aligned} X &= \{\alpha = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)\colon \alpha_i \in \mathbf{R} \text{ pour tous } i \in \mathbf{N} \text{ et } \alpha_i = 0 \text{ pour presque tous } i \in \mathbf{N}\} \\ &= \{\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbf{N}}\colon \alpha_i \in \mathbf{R} \text{ pour tous } i \in \mathbf{N} \text{ et } \alpha_i = 0 \text{ sauf pout une partie finie de } \mathbf{N}\}. \end{aligned}$$

muni de la norme $\|\alpha\| = \sup_{i\in\mathbf{N}} |\alpha_i|$. On définit:

$$\begin{aligned} T\colon X &\longrightarrow X \\ \alpha &\mapsto (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \ldots), \text{ et} \\ S\colon X &\longrightarrow X \\ \alpha &\mapsto (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots, \ldots) \end{aligned}$$

- ▶ Montrer que T et S sont opérateurs linéaires.
- ▶ Montrer que T est injectif. (`Indication:` Calculer $N(T)$.)

- ▶ Décider si T est borné. Si oui, calculer $\|T\|$.
- ▶ Décider si S est borné. Si oui, calculer $\|S\|$.
- ▶ Calculer ST et TS et $\|ST\|$.

(5) Soient f et g deux formes linéaires non-nuls sur un espace normé $(X, \|\cdot\|)$ sur $\mathbf{R}$. Montrer que si $N(f) = N(g)$ alors $f = \lambda g$ pour certain $\lambda \in \mathbf{R}$.

(6) Trouver la représentation matricielle de chacun des opérateurs T de $\mathbf{R}^2$ relativement à la base $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$, $\{e_1' = (1,1), e_2' = (1,-1)\}$ et $\{e_1'' = (1,3), e_2'' = (2,5)\}$.
- ▶ $T(x,y) = (2y, 3x - 2y)$
- ▶ $T(x,y) = (2x + y, y - x)$
- ▶ $T(x,y) = (3x - 4y, x + 5y)$

(7) Soit $T\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ défini par $T(x,y,z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$.
- ▶ Trouver la matrice de T dans la base $e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,0,0)$.
- ▶ Calculer $\|T\|$.

(8) Dans $X = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, c'est-à-dire dans l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, soit $V = sp(\{1, t, e^t, te^t\})$ et $W = sp(\{1, e^3t, te^{3t}, t^2e^{3t}\})$. Sur X on considère l'opérateur D, défini par $(Dx)(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$. Trouver la matrice de
- ▶ $D|_V\colon V \longrightarrow V$ et
- ▶ $D|_W\colon W \longrightarrow W$.

(9) Pour un entier naturel n fixé soit $X = \mathbf{R}[t]^{[n]} := \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n \colon a_i \in \mathbf{R}$ pour tous $i \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$. Pour un entier naturel k et $a \in \mathbf{R}$, on définit

$$T_kx(t) = T_k(a_0 + a_1t + \ldots a_nt^n) := \frac{d^k}{(dt)^k}(p(t))|_{t=a}.$$

Montrer que T_k est un forme linéaire sur X.

(10) Soit X un espace vectoriel de dimension fini et soient x, y deux vecteurs distincts dans X. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f\colon X \longrightarrow X$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

(11) Soit $X = \mathbf{R}^3$ et soit Z le sous-espace de X déterminé par l'équation $y = 0$. Considèrons la forme linéaire $f(x,z) = \frac{1}{2}(x - z)$ sur X. Pour un réel k, montrer qu'il existe une forme linéaire $\widetilde{f}\colon X \longrightarrow X$ telle que $\widetilde{f}$ est un extension de f et $f(1,1,1) = k$. Est-ce que $\widetilde{f}$ unique?

(12) Soit X un espace vectoriel de dimension fini. Par 0^X et 1^X on note l'opérateur nul et l'opérateur identique de X. Montrer que, quelle que soit la base $\mathcal{B} = \{e_i\}$ de X:
- ▶ $1^X_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I$ la matrice identité, et
- ▶ $0^X_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = 0$ la matrice nul.

(13) Soit $X = \mathbf{R}^3$. Calculer la base dual des bases suivantes:
- ▶ $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$
- ▶ $\mathcal{B} = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$
- ▶ $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$

(14) Soit $X = \mathbf{R}^3$ et soit $Y_{a,b,c}$ est le sous-espace vectoriel de X donné par $Y_{a,b,c} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon ax + by + cz = 0\}$.
- ▶ Trouver une forme linéaire sur X, c'est-à-dire une opérateur linéaire $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$, tel que $N(f) = Y_{1,0,0}$.
- ▶ Trouver une forme linéaire sur X, c'est-à-dire une opérateur linéaire $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$, tel que $N(f) = Y_{0,1,0}$.
- ▶ Trouver une forme linéaire sur X, c'est-à-dire une opérateur linéaire $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$, tel que $N(f) = Y_{0,0,1}$.
- ▶ Trouver une forme linéaire sur X, c'est-à-dire une opérateur linéaire $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$, tel que $N(f) = Y_{a,b,c}$.

Soit maintenant X un espace vectoriel de dimension n et soit Y un sous-espace vectoriel de X de dimension $n - 1$. (Un tel sous-espace est dit un hyperplan.) Montrer qu'il existe un opérateur linéaire $f\colon X \longrightarrow X$ tel que $N(f) = Y$. Est-ce que f unique. (`Indication:` Exercice 5.)