MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 7

A. ZEYTİN

(1) Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et M une partie quelconque de X. On définit $M^{ann} := \{f \in X^* : f(x) = 0 \text{ pour tout } m \in M\}$.
- Pour $M = \{(0,0)\} \subset \mathbf{R}^2$ calculer M^{ann}.
- Pour $M = \{(0,1)\} \subset \mathbf{R}^2$ calculer M^{ann}.
- Pour $M = \{(1,0)\} \subset \mathbf{R}^2$ calculer M^{ann}.
- Pour $M = \{(1,1)\} \subset \mathbf{R}^2$ calculer M^{ann}.
- Pour $M = \{(0,2),(2,0)\} \subset \mathbf{R}^2$ calculer M^{ann}.
- Décider si M^{ann} est un sous-espace de X^*.
- Montrer que $M^{ann} = (sp(M))^{ann}$.
- Si X est de dimension finie, quel est la dimension de M^{ann} en termes de dimension de $sp(M)$.
- Calculer M^{ann}; où $M = \{(1,1,0),(0,1,1)\} \subset \mathbf{R}^3$.

(2) Montrer que l'espace dual de ℓ^p et ℓ^q; où $p \in (1,\infty)$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(3) Montrer que l'espace dual de $c_o := \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} : \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = 0\}$ est ℓ^1.

(4) Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien sur $\mathbf{R}$. Montrer que:
- si $x \perp y$ (c'est-à-dire $\langle x,y\rangle = 0$) alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{1}{2}(x+y)\|^2$.
- si $x \perp y$ alors x et y sont linéairement indépendents.
- si $x_i \perp x_j$ pour tout $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, alors $\{x_1,\ldots,x_n\}$ est une partie linéairement indépendente de X.

(5) Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer que

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

(6) Soit X un espace vectoriel de dimension $n < \infty$. Montrer qu'un produit scalaire sur X est déterminé par

$$\gamma_{i,j} := \langle e_i, e_j\rangle \; i,j \in \{1,2,\ldots,n\};$$

où $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base de X.

(7) Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente, disons vers $x \in N$, dans $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, un espace préhilbertien. Supposons qu'il existe un $y \in X$ tel que $x_n \perp y$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $x \perp y$.

(8) Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et soient $x, y \in X$. Montrer que
- $x \perp y$ si et seulement si $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.
- $x \perp y$ si et seulement si $\|x\| \leq \|x + \alpha y\|$ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

(9) Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer qu'il existe des opérateurs linéaires bornés $T: X \longrightarrow X$ tels que $\langle Tx, x\rangle = 0$ mais $T \not\equiv 0$. (`Indication:` Considèrez une rotation du $\mathbf{R}^n$.)

(10) Soit $T: X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire et soient $A \subset X$, $B \subset Y$ deux parties non-vides. Montrer que:
- si A est convexe alors $T(A)$ est convexe,
- si B est convexe et $T^{-1}(B) \neq \emptyset$ alors $T^{-1}(B)$ est convexe.

(11) Soit $A, B \subset X$ deux parties convexes d'un espace vectoriel X. Monter que
- $A \cap B$ est convexe,
- $A + B := \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ est convexe, et
- $\alpha \cdot A := \{\alpha \cdot x : x \in A\}$ est convexe où $\alpha \in \mathbf{R}$.

Décider si $A \cup B$ est convexe.

(12) Soit M une partie d'un espace vectoriel X. La plus petite partie de X qui contient M et qui est convexe est dit l'enveloppe convexe de M et notée par $\mathrm{hull}(M)$. Pour les ensembles suivants déterminer $\mathrm{hull}(M)$:

- $\{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbf{R}^2$
- $\{(1,0,0),(0,1,0)\} \subset \mathbf{R}^3$
- $\{(1,0),(0,1),(2,2)\} \subset \mathbf{R}^2$
- $\{(t,t) \colon t \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2$
- $\{(t,t) \colon t \in \mathbf{R}\} \cup \{(1,0)\} \subset \mathbf{R}^2$
- $\{(t,0,0) \colon t \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$
- $\{(t,0,0) \colon t \in \mathbf{R}\} \cup \{(0,0,1)\} \subset \mathbf{R}^3$

(13) Montrer que si M est convexe alors $\mathrm{hull}(M) = M$. En déduire que si M est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel X, alors $\mathrm{hull}(M) = M$.

(14) Soit Y un sous-espace vectoriel de X et soit $x_o \in X \setminus Y$. Montrer que

$$\mathrm{hull}(\{x_o\} \cup Y) = \{\alpha x_o + y \colon 0 \leq \alpha \leq 1,\ y \in Y\}.$$