MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 8

A. ZEYTİN

(1) On considère $X = \mathbf{R}^n$ comme un espace de Hilbert et fixe un vecteur $x_o \in X$, non-nul. Soit Y le sous-espace de X engendré par x_o. Montrer que l'opérateur linéaire $T(w) = 2P_Y(w) - w$ est injectif, où $P_{\cdot M}$ désigne la projection sur le sous-espace M.

(2) Soit X un espace de Hilbert et soit $Y \supsetneq \{0\}$ un sous-espace. On considère $P_Y : X \longrightarrow X$ la projection orthogonale sur Y. Montrer que:
- ▶ $P_Y^2 = P_Y$,
- ▶ $I - P_Y$ est la projection de X sur $Y^\perp$,
- ▶ $Y^\perp$ est fermé,
- ▶ $Y \subset (Y^\perp)^\perp$,

En déduire que si Y est fermé alors $Y = (Y^\perp)^\perp$ et que $\overline{Y} = (Y^\perp)^\perp$. Calculer la norme de P_Y.

(3) Soit X un espace de Hilbert et soit M une partie non-vide de X. Montrer que M est dense dans X (c'est-à-dire $\overline{M} = X$) si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.

(4) Soit $M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Décider si M est:
- ▶ un sous-espace de $\mathbf{R}^n$,
- ▶ complet,
- ▶ convexe.

Trouver un vecteur $x_o \in M$ tel que $||x_o||$ est minimale.

(5) Soient X un espace de Hilbert, $M \subset X$ une partie non-vide convexe de X et $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans M telle que $||x_n||$ converge vers $d = \inf_{x\in M} ||x||$. Montrer que la suite $\{x_n\}$ est convergente.

(6) Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et soient Y, Z deux sous-espaces de X tels que $Y \perp Z$, i.e. $\langle y, z\rangle = 0$ pour tout $y \in Y$ et $z \in Z$. Montrer que $P_{Y\oplus Z} = P_Y \oplus P_Z$, où P_M désigne la projection sur le sous-espace M.

(7) Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Supposons qu'il existe deux vecteurs $x_1, x_2 \in X$ tels que pour tout $w \in X$ on a $\langle x_1, w\rangle = \langle x_2, w\rangle$. Montrer que $x_1 = x_2$.

(8) Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite orthogonale dans X. Montrer que la série $\sum_{i=1}^{\infty} e_n$ converge. (`Indication:` Il suffit de démontrer que la norme de $\sum_{i=1}^{\infty} e_n < \infty$. Pour ça, montrer que la suite $S_N = \sum_{i=1}^N ||e_n||$ est de Cauchy.) Est-ce que la proposition est vraie si on ne suppose pas la suite $\{e_n\}$ étant orthogonale?

(9) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ soit $P_n = \frac{1}{2^n}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]$. On note que $P_n \in L^2([-1,1], \mathbf{R})$. Montrer que
- ▶ $\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^n|_{t=-1}^{t=1} = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k \neq n$.
- ▶ $||P_n||^2 = \frac{2}{2n+1}$, et $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ is $n \neq m$ (`Indication:` Utiliser l'exercice précedent et intégration par parties.)

En déduire que l'ensemble $\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}P_n\}$ est une suite orthonormale dans $L^2([-1,1], \mathbf{R})$. Les polynômes P_n est appelle polynômes de Legendre.

(10) Soit X un espace préhilbertien et $T : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire borné. Montrer que

$$||T|| \leq \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\langle Tu, u\rangle}{||u||^2} = \sup_{||x||=1} \langle Tu, u\rangle$$

(11) Soit X un espace préhilbertien et $T\colon X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire. Montrer que T est borné si et seulement si $\langle Tx, y\rangle$ est borné pour tout $x, y \in X$ avec $\|x\| = 1$ et $\|y\| = 1$.

(12) Soit $X = \ell^2$. On définit le shift $T\colon \ell^2 \longrightarrow \ell^2$; où $T(\{x_n\}) = (x_2, x_3, \dots)$. Calculer l'adjoint du shift.

(13) Soit X un espace de Hilbert, Y un sous-espace. $P_Y\colon X \longrightarrow X$ désigne la projection orthogonale sur Y. Montrer que P est auto-adjoint.

(14) Soit $T\colon X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire borné sur l'espace de Hilbert X. Montrer que si T est auto-adjoint, alors $T^n\colon X \longrightarrow X$ est auto-adjoint pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(15) Soit X un espace de Hilbert et $T\colon X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire. Montrer que T est normal si et seulement si $\|Tu\| = \|T^*u\|$ pour tout $u \in X$.

(16) Soit X un espace préhilbertien et $T\colon X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire. Si X est de dimension finie et T est une isométrie, montrer que T est unitaire.