Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2015 - Première Semestre – Math 452 - Introduction à l'Analyse Fonctionelle
Examen Partiel 1, 06 Oct. 2015 – Ayberk Zeytin
150 mins. **Nom & Prénom:** ______________________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	8	12	27	24	24	95
Score:						

Question 1 (8 points)
Décider si les fonctions suivantes donnent une mérique sur $\mathbf{R}$:

(a) (4 points) $d(x, y) = \max\{x - y, 0\}$

(b) (4 points) $d(x, y) = e^{|x-y|}$

Question 2 (12 points)

Supposons que $(\mathsf{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert et $\mathsf{T} \colon \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{X}$ un opérateur linéaire borné. Montrer que $\ker(\mathsf{T}^*) = \mathsf{R}(\mathsf{T})^{\perp}$

Question 3 (27 points)

Soit $X = L^2([-1,1], \mathbf{R})$. On considère le sous-espace $P = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in X \colon a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$.

(a) (8 points) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x(t), y(t)) & \mapsto & \langle x(t), y(t) \rangle := x(-1)y(-1) + x(0)y(0) + x(1)y(1) \end{array}$$

est un produit scalaire sur X.

(b) (9 points) En utilisant la base $\{y_1(t) = 1, y_2(t) = t, y_3(t) = t^2\}$ pour P, déterminer une base orthonormale pour P.

(c) (10 points) Déterminer l'élément $x_o \in P$, i.e l'application $x_o \colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$, tel que la forme linéaire $f \colon P \longrightarrow \mathbf{R}$ définié par $f(x) = x(0)$ vérifie $f(x) = \langle x, x_o \rangle$ pour tout $x \in P$.

Question 4 (24 points)

Soit $X := \{x \in L^2([a, b], \mathbf{R}) \,|\, x(a) = x(b) = 0$ et f est indéfiniment dérivable$\}$ muni du produit scalaire

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt.$$

On définit $T \colon X \longrightarrow X$ par

$$Tx := \frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}x(t)\right) + x(t).$$

(a) (8 points) Montrer que T est un opérateur linéaire.

(b) (6 points) Calculer $T(t^{452} + e^t)$.

(c) (10 points) En supposant que T est borné déterminer T^*. (`Indication:` Utiliser intégration par parties)

Question 5 (24 points)

Décider si les assertions suivantes sont vraies ou faux:

(a) (6 points) Soit $(\mathsf{X}, \|\cdot\|)$ un espace normé et Y un sous-espace de X. Y est compacte si et seulement si $\mathsf{Y} = \{0\}$.

(b) (6 points) Soit $(\mathsf{X}, \|\cdot\|)$ est un espace normé et soit Y un sous-espace de X. Alors Y est complet.

(c) (6 points) Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $S, T \colon X \longrightarrow X$ deux opérateurs linéaires bornés tels que $\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ pour tout $x \in X$. Alors $S = T$.

(d) (6 points) Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in X$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Alors $\langle x - y, x + y\rangle = 0$.