Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2015 - Première Semestre – Math 452 - Introduction à l'Analyse Fonctionelle
Examen Partiel 1, 06 Oct. 2015 – Ayberk Zeytin
120 mins. **Nom & Prénom:** ______________________________

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	21	14	16	12	63
Score:					

Question 1 (21 points)
Soient $E = \mathbf{R}^3$, $F = \mathbf{R}^4$ deux espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$. On considère l'application

$$\begin{aligned} f\colon E &\longrightarrow F \\ (x,y,z) &\mapsto (x+y+z, x+y+z, 2x-y+5z, 2x+y+3z) \end{aligned}$$

(a) (5 points) Montrer que f est une application linéaire.

(b) (4 points) Donner la matrice de f dans les bases canoniques de E et F.

(c) (6 points) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{im}(\mathsf{f})$. f est-elle surjective?

(d) (6 points) Déterminer une base et la dimension de $\ker(\mathtt{f})$. $\mathtt{f}$ est-elle injective?

Question 2 (14 points)

Soit (X, τ) un espace topologique Hausdorff.

(a) (6 points) Montrer que toutes parties finies de X sont compactes.

(b) (8 points) Montrer que l'ensemble $\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{\alpha\}$ est compact dans X; où $\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une suite qui converge vers α dans X.

Question 3 (16 points)

Montrer que:

(a) (8 points) $\mathfrak{l}^1 \subsetneq \mathfrak{l}^\infty$

(b) (8 points) Décider si $\mathfrak{l}^1$ est complet sous la métrique $\mathsf{d}_{\mathrm{sup}}$. (`Indication:` Utiliser (a).)

Question 4 (12 points)

Décider si les propositions suivantes sont vraies ou pas:

(a) (6 points) Soit $\{\alpha_n\}$ une suite dans un espace métrique (X, d). Si $\{\alpha_n\}$ est bornée alors $\{\alpha_n\}$ est Cauchy.

(b) (6 points) Soit $\{\alpha_n\}$ une suite dans un espace métrique (X, d) qui vérifie

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Alors $\{\alpha_n\}$ est une suite de Cauchy.