Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2015 - Première Semestre – Math 452 - Introduction à l'Analyse Fonctionelle
Examen Partiel 2, 07 Dec. 2015 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ______________________

Question:	1	2	3	Total
Points:	12	45	12	69
Score:				

Question 1 (12 points)

Soit $T\colon X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné entre deux espaces de Banach X et Y. Montrer que s'il existe une constante $C \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tel que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ pour tout $x \in X$ alors $R(T)$ est un fermé de Y.

Question 2 (45 points)

Pour un entier naturel $n \geq 1$ on considère $X = \mathbf{R}[t]^{[n]} = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \colon a_i \in \mathbf{R}\}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

(a) (5 points) Montrer que la fonction

$$\|x\,(t)\| = \|a_0 + a_1 t + \ldots a^n t^n\| := \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$

est une norme sur X.

(b) (5 points) Montrer que $d\colon X \longrightarrow X$, défini par $(dx)\,t := x'(t)$ est un opérateur linéaire sur X.

(c) (5 points) Décider si d est injectif.

(d) (8 points) Décider si d est borné. Si oui, calculer $\|\mathsf{d}\|$.

(e) (8 points) Soit $n = 3$. Pour la base $\mathcal{B}_{X,3} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Trouver la matrice qui représente d par rapport à $\mathcal{B}_{X,3}$.

(f) (8 points) Supposons que $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$ une forme linéaire qui satisfait $f(xy) = fx \cdot fy$. Montrer que si $f \not\equiv 0$ alors il existe un réel $t_o \in \mathbf{R}$ tel que $fx = x(t_o)$ pour tout $x \in X$.

(g) (6 points) Pour $t_0 = 1/2$, trouver la matrice qui représente f par rapport à la base $\mathcal{B}_{X,n} = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$.

Question 3 (12 points)

Montrer qu'une forme linéaire non-nul f sur un espace norme $(X, \|\cdot\|)$ est continue si et seulement si $N(f)$ est un fermé de X. (Indication: Trouver une suite x_n avec $\|x_n\| = 1$ telle que $|f(x_n)| \geq n$ et considérer la suite $z - \frac{fz}{fx_n}x_n$ où $z \in X \setminus N(f)$.)