MATH 325
ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

(1) Calculer $z+w$, $z-w$, zw et z/w oú:
- ▶ $z = 4-4i$ et $w = -8-8i$,
- ▶ $z = 2+2\sqrt{3}i$ et $w = 2-2\sqrt{3}i$,
- ▶ $z = 3+4i$ et $w = 4-3i$,
- ▶ $z = 3-i$ et $w = 2+3i$.

(2) Calculer $(-1-\sqrt{3}i)^3$ et $(1+i)^8$.

(3) Pour $z = x+yi \in \mathbf{C}$ on définit $\mathrm{Re}(z) = x$ et $\mathrm{Im}(z) = y$. Trouver $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\arg(z)$ et $\overline{z}$ où:
- ▶ $z = 3$
- ▶ $z = 13i$
- ▶ $z = \sqrt{3}-i$
- ▶ $z = 4-4i$
- ▶ $z = -1-2i$

(4) Montrer que
- $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$
- $|z|^2 = z\,\overline{z}$

(5) Soit $\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\mathbf{C}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on écrit: $z_n = x_n + \sqrt{-1}\,y_n$ pour obtenir deux suites $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ et $\{y_n\}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que
- ▶ si $\lim z_n = z_o$, alors il existe deux nombres réels X et Y tels que $\lim x_n = X$ et $\lim y_n = Y$.
- ▶ si $\lim x_n = X$ et $\lim y_n = Y$, alors il existe $Z \in \mathbf{C}$ tel que $\lim z_n = \lim(x_n + y_n) = Z$.

(6) Montrer que l'équation $|z| = 2|z-1|$ est une équation d'un cercle et écrire l'équation en termes de x et y.

(7) Calculer $\lim\left(\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right)^n$.

(8) Montrer que $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ et $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$. Déduire que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

(9) Calculer $\sqrt{7i}$, i.e. trouver $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x+yi = \sqrt{7i}$.

(10) Calculer $\sqrt{6+6i}$.

(11) Calculer $\sqrt{3+3\sqrt{3}i}$.

(12) Décider si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, bornés, compacts, connexes:
- ▶ $\{z \in \mathbf{C} \colon \mathrm{Im}(z) < 1\}$
- ▶ $\{z \in \mathbf{C} \colon \mathrm{Re}(z) \geq 2\}$
- ▶ $\{z \in \mathbf{C} \colon |z-2| \leq 2\}$
- ▶ $\{z \in \mathbf{C} \colon 1 < |z-i| < 4\}$
- ▶ $\{z \in \mathbf{C} \colon |z| = 2\}$
- ▶ $\{z \in \mathbf{C} \colon |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{4}\}$
- ▶ $\{z \in \mathbf{C} \colon z = \frac{1}{n+ni}\}$
- ▶ $\{z \in \mathbf{C} \colon z = \overline{z}\}$

Déterminer leur adherence et frontière.

(13) Décrire/dessiner les ensembles suivants:
- ▶ $\{z \in \mathbf{C} \colon |z| = |z-1|\}$
- ▶ $\{z \in \mathbf{C} \colon \left|\frac{z+i}{z-i}\right| < 1\}$

- $\{z \in \mathbf{C} \colon |2z-4| <\leq\}$

(14) Trouver toutes les racines de l'équation

$$z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

(15) Decider si les polynômes suivantes sont analytiques ou pas:
- $p(x+\sqrt{-1}y) = x^3 - 3xy^2 - x + \sqrt{-1}(3x^2y - y^3 - y)$
- $p(x+\sqrt{-1}y) = x^2 + iy^2$
- $p(x+\sqrt{-1}y) = 2xy + \sqrt{-1}(y^2 - x^2)$

(16) Motrer que il n'existe pas un polynôme non-constant analytique dont toutes valeurs sont dans $\sqrt{-1}\mathbf{R}$.